Sur la hauteur p-adique dans une famille de courbes elliptiques

Christian Wuthrich

1 La version p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer

Soit E une courbe elliptique définie sur le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et soit p un nombre premier impair tel que E ait bonne réduction ordinaire en p. Afin de pouvoir énoncer une version p-adique de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer pour la fonction L p-adique, il faut tout d'abord construire un analogue p-adique de la hauteur canonique de Néron–Tate, c.-à-d. une fonction quadratique

$$h_p\colon E(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}_p$$

telle que

$$\langle P, Q\rangle_p = h_p(P+Q) - h_p(Q) - h_p(P)$$

soit une forme bilinéaire. Ainsi on pourrait espérer qu'une formule de la forme

$$L_p(E,s) \sim \frac{\mathrm{Reg}_p \cdot \#\text{Ш}(E/\mathbb{Q})(p) \cdot N_p^2 \cdot \prod c_v}{(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}})^2} \cdot (s-1)^{r(E/\mathbb{Q})} + \cdots$$

soit valable, où Reg_p, le régulateur p-adique de $E/\mathbb{Q}$ désigne le déterminant de $(\langle P_i, P_j\rangle_p)$ quand P_i parcourt un ensemble de générateurs de $E(\mathbb{Q})$ modulo torsion. Les autres notations sont standard, comme par exemple N_p pour le nombre de points de la réduction de la courbe modulo p et $r(E/\mathbb{Q})$ pour le rang de la courbe, etc. Pour les détails, nous renvoyons à [6].

2 Construction de la hauteur p-adique

Nous fixons une équation de Weierstrass

$$y^2 + a_1\,x\,y + a_3\,y = x^3 + a_2\,x^2 + a_4\,x + a_6$$

pour E avec des coefficients entiers $a_i \in \mathbb{Z}$. Un point non-nul P de $E(\mathbb{Q})$ s'écrit alors comme

$$P = (x(P), y(P)) = \left(\frac{a(P)}{e(P)^2}, \frac{b(P)}{e(P)^3}\right)$$

si on exprime les coordonnées en fractions réduites d'entiers.

Néron [7] et Bernardi [2] étaient les premiers à donner des définitions de hauteurs p-adiques sur une courbe elliptique, mais ce n'est qu'après les travaux de Perrin-Riou [8] et Schneider [9] qu'une hauteur p-adique *canonique* a été trouvée pour le cas de la réduction ordinaire. Dans [5], cette hauteur canonique est exprimée à l'aide de la fonction sigma p-adique canonique ; voici l'énoncé.

Théorème (Mazur–Tate). *Il existe une unique fonction en $t = -\frac{x}{y}$ de la forme*

$$\sigma_p(t) = t + \textit{termes d'ordre supérieur} \in \mathbb{Z}_p[\![t]\!]$$

telle que

$$h_p(P) = \log_p \left(\frac{e(P)}{\sigma_p(P)} \right)$$

soit la hauteur p-adique canonique de P pour tout point P de $E(\mathbb{Q})$ ayant bonne réduction en toute place et tel que $t(P) \in p\mathbb{Z}_p$.

Pour que la conjecture sur le premier terme de la série de la fonction L p-adique ait un sens, il faut que le régulateur Reg_p soit non-nul. Autrement dit, on a la

Conjecture (Schneider). *La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ est non-dégénérée.*

Bien qu'elle se vérifie facilement dans un cas concret, cette conjecture n'est toujours pas démontrée dans le cas général, sauf pour les courbes elliptiques définies sur $\mathbb{Q}$ à multiplication complexe de rang 1, voir l'article de Bertrand [3].

3 Autres conjectures

Grâce à des milliers de calculs de hauteurs p-adiques à l'aide de `pari-gp` [1] et des arguments heuristiques dans les cas $p = 3$ et 5, nous formulons la conjecture suivante

Conjecture. *L'expression*

$$\frac{\mathrm{Reg}_p \cdot N_p^2}{p^r}$$

est une unité dans $\mathbb{Z}_p^\times$ pour tous les nombres premiers p pour lesquels E a bonne réduction ordinaire à l'exception d'un ensemble de densité zéro.

Autrement dit, la valuation de $h_p(P)$ est très souvent 1 pour un point P avec bonne réduction en toute place et tel que $t(P)$ ait valuation 1. En fait, on pourrait même formuler des conjectures plus précises en termes de relations asymptotiques.

À l'aide de la théorie d'Iwasawa pour la courbe E, on peut déduire de cette conjecture une autre

Conjecture. *Supposons que le groupe de Tate-Shafarevitch $Ш(E/\mathbb{Q})$ de E soit fini. Soit $\mathbb{Q}^{p\text{-}cyc}$ l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de $\mathbb{Q}$. Alors le rang du groupe de Mordell-Weil $E(\mathbb{Q}^{p\text{-}cyc})$ est égal au rang de $E(\mathbb{Q})$ pour tout premier p où E a bonne réduction ordinaire à l'exception d'un ensemble de densité zéro.*

Il est important de noter que le rang de $E(\mathbb{Q}^{p\text{-cyc}})$ est fini d'après un résultat profond de Kato [4]. En plus, on peut ajouter à la conjecture que $Ш(E/\mathbb{Q}^{p\text{-cyc}})$ est fini dans le cas d'égalité des rangs.

4 La variation de la hauteur dans des familles de courbes elliptiques

Pour illustrer le genre de résultat que l'on obtient quand on fait varier la courbe elliptique E plutôt que le nombre premier p, voici un exemple. Soit $\mathcal{E}$ la surface elliptique définie par

$$\mathcal{E}: \quad y^2 + y = x^3 + (13\,T - 1)\cdot x.$$

Elle admet une section d'ordre infini $P = (0, 0)$. Lorsque l'on spécialise à une fibre en posant T égal à un entier, on obtient une courbe $\mathcal{E}_T$ avec un point $P_T \in \mathcal{E}_T(\mathbb{Q})$. On aimerait analyser la variation de la hauteur 13-adique de P_T lorsque T varie dans les entiers. Déjà, il faut vérifier que chaque courbe $\mathcal{E}_T$ a bonne réduction ordinaire en $p = 13$; ce qui est le cas ici et, en plus, la réduction est constante. Puis, on aimerait utiliser la fonction sigma 13-adique de Mazur et Tate. Par chance, le point P_T sur $\mathcal{E}_T$ a bonne réduction en toute place pour tout $T \in \mathbb{Z}$. Puis on vérifie que $16 \cdot P_T$ satisfait à $t(16P_T) \in 13 \cdot \mathbb{Z}_{13}$. Le calcul de la hauteur 13-adique donne le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{13}\cdot h_{13}(P_T) =& (6\cdot 13 + \mathbf{O}(13^2)) + (11 + 8\cdot 13 + \mathbf{O}(13^2))\cdot T\\ &+ (8\cdot 13 + \mathbf{O}(13^2))\cdot T^2 + \mathbf{O}(13^2)\end{aligned}$$

pour tout entier $T \in \mathbb{Z}$. Il est maintenant facile de vérifier que la valuation de $h_{13}(P_T)$ est égale à 1 pour tout entier T qui n'est pas divisible par 13. En fait, ce calcul est un exemple du

Théorème. *Soit $\mathcal{E}$ une équation de Weierstrass avec coefficients dans $\mathbb{Z}[T]$ et soit p un nombre premier impair tel que $\mathcal{E}_T$ ait bonne réduction ordinaire en p pour tout $T \in \mathbb{Z}$. On suppose que P est une section non-nulle dont un multiple Q a bonne réduction en toute place pour tout $T \in \mathbb{Z}$ et tel que $\gamma(Q, T) = 1$ pour tout $T \in \mathbb{Z}$. Alors $h_p(P_T)$ appartient à l'algèbre de Tate $\mathbb{Z}_p\{T\}$ des séries formelles dans $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ dont les coefficients convergent vers zéro.*

La condition $\gamma(Q, T) = 1$ est une restriction technique qui dit que le dénominateur du point Q_T s'obtient en remplaçant T dans l'expression polynomiale qui représente le dénominateur de Q. Elle est vérifiée, par exemple, lorsque P a des coordonnées constantes. Pour les détails, ainsi que la preuve, nous renvoyons à [10].

Comme conséquence du théorème et du théorème de préparation de Weierstrass, on peut conclure que $h_{13}(P_T)$ ci-dessus n'a qu'un seul zéro $T_0 = 3 \cdot 13 + \mathbf{O}(13^2) \in \mathbb{Z}_{13}$ comme fonction en $T \in \mathbb{Z}_{13}$. On a alors vérifié la conjecture de Schneider pour toute courbe $\mathcal{E}_T$ de cette famille à l'exception peut-être d'une seule $\mathcal{E}_{T_0}$, mais il semble bien que T_0 n'appartienne pas à $\mathbb{Z}$. Ici aussi on peut énoncer plus généralement le

Théorème. *Soit $\mathcal{E}$ et p comme auparavant et soit $P^{(1)}, \ldots, P^{(g)}$ des sections qui satisfont les conditions du théorème précédent. Alors soit la fonction que $T \mapsto \mathrm{Reg}_p(P_T^{(1)}, \ldots, P_T^{(g)})$ est constante nulle, soit qu'elle n'a qu'un nombre fini de zéros en $\mathbb{Z}$.*

On peut en déduire d'autres résultats comme le fait qu'il existe des hauteurs p-adiques arbitrairement petites, comme par exemple en approximant T_0 :

$$\begin{array}{ll} T \equiv 0 \pmod{13} & h_{13}(P_T) \equiv 0 \pmod{13^2} \\ T \equiv 3 \cdot 13 \pmod{13^2} & h_{13}(P_T) \equiv 0 \pmod{13^3} \\ \cdots & \end{array}$$

Puis, ceci montre aussi que l'on peut trouver des courbes pour lesquelles il y a des hauteurs p-adiques non-canoniques très proches de la hauteur canonique qui sont dégénérées. Ainsi la preuve de la conjecture de Schneider passe probablement par un argument subtil de transcendance.

Références

[1] C. Batut, d. Bernardi, H. Cohen, M. Olivier, and K. Belabas, `pari-gp`, `http ://www.parigp-home.de/`, 1999.

[2] Dominique Bernardi, *Hauteur p-adique sur les courbes elliptiques*, Seminar on Number Theory, Paris 1979–80, Progr. Math., vol. 12, pp. 1–14.

[3] Daniel Bertrand, *Valuers de fonctions thêta et hauteur p-adiques*, Seminar on Number Theory, Paris 1980-81 (Paris, 1980/1981), Progr. Math., vol. 22, pp. 1–11.

[4] Kazuya Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular curves*, Preprint Series, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.

[5] Barry Mazur and John Tate, *The p-adic sigma function*, Duke Math. J. **62** (1991), no. 3, 663–688.

[6] Barry Mazur, John Tate, and Jeremy Teitelbaum, *On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 1–48.

[7] André Néron, *Hauteurs et fonctions thêta*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **46** (1976), 111–135.

[8] Bernadette Perrin-Riou, *Descente infinie et hauteur p-adique sur les courbes elliptiques à multiplication complexe*, Invent. Math. **70** (1982/83), no. 3, 369–398.

[9] Peter Schneider, *p-adic height pairings. I*, Invent. Math. **69** (1982), no. 3, 401–409.

[10] Christian Wuthrich, *On p-adic heights in families of elliptic curves*, à paraître.

Christian Wuthrich
Trinity College
Cambridge CB2 1TQ, UK.
c.wuthrich@dpmms.cam.ac.uk