Problems of Control and Information Theory, Vol. 7 (5), pp. 345—360 (1978)

ОПТИМАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ МАРКОВСКИХ СИГНАЛОВ

В. П. БЕЛАВКИН

(Москва)

(Поступила в редакцию 13 сентября 1976 г.)

Развивается многошаговый вариант теории квантовых измерений и последовательных решений применительно к задачам текущей фильтрации в квантовых каналах. Получено квантовое обобщение оптимальной линейной фильтрации Калмана и Калмана—Бьюси. В общей марковской ситуации выведено рекуррентное уравнение, обобщающее уравнение оптимальной нелинейной фильтрации Стратоновича. Доказано, что оптимальная квантовая текущая фильтрация в гауссовском случае является линейной.

Введение

Успехи квантовой электроники и лазарной техники делают все более актуальными теоретические исследования потенциальных возможностей сверхвысокочастотных и оптических систем обнаружения, связи и управления. Такие системы содержат каналы наблюдения, которые адекватно описываются только с учетом принципиальных ограничений, накладываемых постулатами квантовой теории измерений. Учет этих ограничений также необходим при решении принципиальных вопросов наблюдаемости (микронаблюдаемости [1]) в микросистемах, а также в макросистемах при отсутствии других ограничений на точность наблюдения (в условиях предельно высокой точности). Решению проблемы оптимизации квантового измерения для задач оптимального обнаружения, различения и оценивания квантовых сигналов в рамках одношаговой (статической) теории было посвящено много недавних работ (см. обзор [2] и цитируемую в нем литературу, а также [3, 4]). Однако попытки развить достаточно общий многошаговый (динамический) вариант теории оптимальных квантовых измерений наталкивались на значительные трудности, связанные с необходимостью учета введенного фон Нейманом [5] специфически квантового понятия редукции состояния, происходящего в результате квантово-механического измерения. Между тем, как недавно показали Дэвис и Льюис [6], редукция фон Неймана связана с чересчур ограничительной концепцией повторяемости, которая неявно присутствует в большинстве аксиоматических трактовок квантовой механики, при которых измерения описываются эрмитовыми операторами. Отход от этой концепции, предложенный Дэвисом, приводит к значительно более гибкой теории последовательных измерений и квазиизмерений, в рамках которой удается сформулировать и решить ряд динамических задач оптимизации квантового наблюдения, из которых здесь будет исследована наиболее типичная задача квантовой текущей фильтрации.

В примитивной форме идея Дэвиса соответствует физическому предположению об «очищении измерительной полости» после каждого измерения, благодаря чему состояние системы на данном этапе не зависит от результатов предшествующих измерений. Именно это предположение и лежит в основе формулировки задачи квантовой фильтрации случайных последовательностей $\{x_k,\ k = 0, \ldots\}$, предложенной недавно Барасом и Харгером [7, 8]. Согласно их подходу, на каждом этапе ищется оптимальное измерение и оптимальная обработка результатов этого и предыдущих измерений из условия минимума среднеквадратичной ошибки. В такой постановке, однако, не удается указать какой-либо эффективной процедуры решения этой задачи даже в линейно-рекурсивной (марковской) ситуации, за исключением специального гауссовского случая.

Экстремальная задача оптимальной квантовой фильтрации значительно упрощается, если сформулировать ее несколько по-другому: допустить, что квантовое измерение на каждом этапе может зависеть от результатов предшествующих измерений, и искать оптимальные измерения, результаты которых дают оптимальные (без всякой дальнейшей обработки) оценки. Указанное включение процедуры обработки в самое процедуру измерения соответствует предположению, что измерительный аппарат может выбираться не только в зависимости от момента измерения, как это допускалось в [7, 8], но и в зависимости от результатов предыдущих измерений. Благодаря этому допущению задача оптимальной квантовой фильтрации сводится на каждом этапе к уже известной [2—4] статической задаче оптимального квантового наблюдения с соответствующе выбранным выходным сигналом, включающим помимо квантовых переменных, относящихся к данному этапу, результаты предыдущих наблюдений. Как будет здесь показано, в марковской ситуации последовательности таких статических задач можно придать рекуррентную форму, что можно рассматривать как квантовый аналог ненилейной фильтрации Стратоновича [9]. Такой метод по существу дает эффективное решение (точнее, сведение задачи квантовой фильтрации к известной задаче статического наблюдения) и для немарковской последовательности $\{x_k\}$, ибо такую последовательность всегда можно включить в некоторую многомерную марковскую цепь, например, в цепь $\{x^k\}$ с компонентами $x^k = (x_0, \ldots, x_{k-1})$ расширяющейся размерности.

Сначала рассмотрим квантовую линейную фильтрацию, которая, согласно изложенной идее, формулируется на каждом этапе не как задача [7] оптимизации произвольного измерения с последующей оптимизацией линейной обработки результатов, а сводится к соответствующей задаче нахождения оптимального линейного квазиизмерения без последующей обработки, рассмотренной в общем виде в [10]. При таком подходе, в отличие от [7], оптимальное преобразование находится только с использованием корреляционной теории без всякого предположения о гауссовости. Для марковских сигналов это преобразование является квантовым аналогом фильтра Калмана—Бьюси.

В классическом случае, благодаря существованию универсального полного измерения выходного сигнала, оба подхода совпадают, ибо всякое измерение, зависящее от результатов предыдущих измерений можно представить как некоторое преобразование результатов универсального измерения, относящихся к настоящему и предыдущему моменту. Как будет здесь показано, такая же ситуация имеет место и в квантовом гауссовском случае, при котором роль универсального измерения играет оптимальное когерентное измерение, и оптимальную фильтрацию можно представить как некоторую линейную обработку. В общем, негауссовском случае предлагаемая оптимальная фильтрация является более совершенной, чем фильтрация Бараса—Харгера.

1. Оптимальная рекурсивная линейная фильтрация в квантовых каналах

Пусть $x(t)$ — ненаблюдаемый векторный случайный процесс второго порядка с нулевыми векторами математических ожиданий $E\{x_i(t)\} = 0$ и известными матрицами $\langle x(t) \mid x(s) \rangle$ корреляций $E\{x_i(t)\, x_j(s)\} = \langle x_i(t) \mid x_j(s) \rangle$ (допускается, что компоненты x_i, $i = 1, \ldots, m$ могут принимать комплексные значения). Предположим, что процесс $x(t)$ является марковским. В рамках корреляционной теории можно считать, что $x = x(t)$ — вектор динамического состояния линейной стохастической системы, которая в дискретном времени $t = t_0,\ t_0 + 1, \ldots$ описывается рекуррентным уравнением

$$x(t) = A(t)\, x(t-1) + \xi(t),\ x(t_0) = x_0\,. \tag{1.1}$$

Здесь A — заданная, в общем случае комплексная и зависящая от времени матрица, x_0 — начальное случайное значение, имеющее нулевое математическое ожидание $E\{x_0\} = 0$ и конечную корреляционную эрмитову матрицу $\langle x_0 \mid x_0 \rangle = S_0$, а $\xi(t)$ — векторный (комплексный) шум, т. е. некоррелированная с x_0 случайная последовательность векторов $\xi = \xi(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями $E\{\xi\} = 0$ и заданными корреляционными матрицами $\langle \xi(t) \mid \xi(s) \rangle$ δ — образного вида

$$\langle \xi(t) \mid \xi(s) \rangle = Q\delta(t-s)\,, \tag{1.2}$$

где $Q = Q(t)$ — конечные эрмитовы матрицы, а $\delta(t-s)$ — означает символ Кронеккера для дискретных t и s.

Допустим, что состояние $x(t)$ может наблюдаться с помощью квантового канала. Што означает, что роль выходного сигнала $y(t)$ играет при каждом t некоторая система $y = \{y_k,\ k = 1, \ldots, n\}$ некоммутирующих символов, в общем случае несамосопряженных* $y_k \neq y_k^*$ и даже ненормальных $y_k y_k^* \neq \neq y_k^* y_k$, которые порождают с помощью алгебраических операций любую доступную на выходе наблюдаемую последовательность $z = z(t)$. Пусть заданы матрицы $\langle x(t) \mid y(s) \rangle$ взаимных корреляций. $E\{x_i(t) y_k(s)^*\} \equiv \langle x_i(t) \mid y_k(s) \rangle$ входного и выходного сигналов канала, а также матрицы $\langle y(t) \mid y(s) \rangle_\pm$ левых $\langle y_k(t) y_l(s) \rangle_+ \equiv E\{y_k(t) y_l(s)^*\}$ и правых $\langle y_k(t) \mid y_l(s) \rangle_- \equiv E\{y_l(s)^* y_k(t)\}$ корреляций выходного квантового сигнала (математические ожидания $E\{y_k(t)\}$ предполагаются нулевыми).

Предположим, что состояние канала в каждый может t определяется значением $x(t)$ и не зависит ни от предыдущих значений $x(s)$, $s < t$ на его выходе, ни от результатов предыдущих измерений $z(s)$, $s < t$ на его входе. Последнее алгебраически эквивалентно предположению, что символы $y(t)$, $y(t)^*$ коммутируют с $y(s)$, $y(s)^*$ при $t \neq s$. В рамках корреляционной теории сделанные предположения приводят к линейной модели квантового канала

$$y(t) = D(t)\, x(t) + \eta(t), \tag{1.3}$$

где D — некоторая, вообще говоря, комплексная и зависящая от t матрица, а $\eta(t)$ — квантовый шум, т. е. некоррелированная с $x(s)$ последовательность вектор-символов $\eta = \eta(t)$ с нулевыми математическими ожиданиями $E\{\eta\} = 0$ и заданными корреляционными матрицами $\langle \eta(t) \mid \eta(s) \rangle_\pm$ δ —образного вида

$$\langle \eta(t) \mid \eta(s) \rangle_\pm = N_\pm\, \delta(t-s) \tag{1.4}$$

(эрмитовы матрицы $N_I = N_I(t)$ в силу некоммутативности $\eta_k \eta_l^* \neq \eta_l^* \eta_k$ различаются: $N_+ = E[\eta_k \eta_l^*]$, $N = E[\eta_k^* \eta_l]$.

Требуется для каждого t найти из условия минимума среднеквадратичной ошибки

$$R(t) = E\{\|\hat{x}(t) - x(t)\|_G^2\}, \quad \text{где} \quad \|x\|_G^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} \bar{x}_i x_j, \tag{1.5}$$

($G = G(t) > 0$ — эрмитова матрица с элементами g_{ij}) векторную наблюдаемую величину $x = \hat{x}(t)$, $\hat{x} = \{\hat{x}_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, являющуюся линейным преобра-

* Сопряжение $y \to y^*$, определяемое аксиомами 1) $(\lambda y)^* = \bar{\lambda} y^*$, 2) $(y_k + y_l)^* = = (y_k^* + y_l^*$, 3) $(y_k y_l)^* = y_l^* y_k^*$, является обычным эрмитовым сопряжением в представлении символов y линейными операторами в гильбертовом пространстве H квантово-механических состояний.

зованием выходного квантового сигнала $y(t)$ в может t и могущую линейно зависеть от результатов наблюдения $\hat{x}(s)$ в предыдущие моменты $s < t$. Ограничение квантовой фильтрации свойством линейности позволяет отделить процедуру квантового измерения от процедуры обработки и представить $\hat{x}(t)$ в виде суммы случайного вектора—линейной обработки результатов предыдущих измерений $\hat{x}(s)$, $s < t$ и не зависящей от них векторной наблюдаемой величины $z = z(t)$, $z = \{z_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, линейной по y:

$$z(t) = K(t)\, y(t) + \zeta(t), \tag{1.6}$$

где K — некоторая матрица, могущая быть комплексной.

Пару $(x(t), z(t))$ можно рассматривать как вход и выход классического линейного канала, который представляет собой композиция квантового канала (1.3) и измерительного аппарата (1.6). Учитывая необходимое условие оптимальности линейной оценки $\hat{x}(t)$

$$\langle \hat{x}(t) \mid \hat{x}(s) \rangle = \langle x(t) \mid \hat{x}(s) \rangle, \qquad s \leq t$$

(условие ортогональности ошибки $x(t) - \hat{x}(t)$ к проекции $x(s)$), нетрудно найти, что в рассматриваемой линейно-марковской ситуации (1.1)—(1.4) на каждом этапе t достаточно учитывать лишь последний предшествовавший результат $\hat{x}(t-1)$:

$$\hat{x}(t) = L(t)\, \hat{x}(t-1), + z(t), \quad \hat{x}(t)_0 = z(t_0), \tag{1.7}$$

причем для оптимальности оценки $\hat{x}(t)$ необходимо, чтобы при каждом t

$$L(t) = A(t) - K(t)\, D(t)\, A(t). \tag{1.8}$$

Остается найти вид оптимального линейного преобразования (1.6), т. е. «измерительный аппарат».

В классическом случае, когда шум канала (1.3) есть просто δ — коррелированный векторный шум ($N_+ = N_- = N$), так что $y(t)$ — классический выходной сигнал, оптимальное преобразование (1.6) описывается нулевым $\zeta(t)$ и матрицей, $K = TR^{-1}$, где

$$T(t) = S(t)\, D(t)^+, \quad R(t) = D(t)\, S(t)\, D(t)^+ + N(t) \tag{1.9}$$

(означает эрмитовое сопряжение матриц), а S — матрица, определяющая корреляционную матрицу P ошибки $\hat{x} - x$ в момент t

$$P(t) = S(t) - K(t)\, D(t)\, S(t) \tag{1.10}$$

и удовлетворяющая рекуррентному уравнению

$$S(t) = A(t)\, P(t-1)\, A(t)^+ + Q(t),\ S(t_0) = S_0 \tag{1.11}$$

при подстановке (1.10) в (1.11) (теорема Калмана [11]). Этот результат остается, очевидно, верным и в квантовом случае, если переменные $z(t) = K(t)y(t)$ удовлетворяют при каждом t условию совместной наблюдаемости

$$z_i z_j^* = z_j^* z_i, \quad z_i z_j = z_j z_i. \tag{1.12}$$

Последнее имеет место, например, когда оцениваемый процесс $x(t)$ является одномерным и действительным, а выходной сигнал $g(t)$ — самосопряженным, так что $z(t)$ при каждом t — одномерная самосопряженная величина. При этом безразлично, какую из матриц $N_\pm$ подставлять в (1.9) в качестве матрицы N — обе они приводят к одинаковым матрицам $P(t)$, определяющим потери (1.5): $R(t) = \mathrm{Tr}\,[G(t)P(t)$.

2. Линейная фильтрация векторных сигналов в бозонных каналах

Чтобы получить квантовое обобщение многомерного результата Калмана, будем, следуя [10], допускать, что компоненты $\{\zeta^i\}$ входящего в (1.6) векторного процесса $\zeta(t)$ могут не коммутировать между собой, а также с $\{\zeta_i^*\}$, но коммутируют с $\zeta(s)$, $\zeta(s)^*$ при $s \neq t$, а также с $y(s)$, $y(s)^*$ при всех s. Статистически $\zeta(t)$ интерпретируется как квантовый шум, вносимый измерительным аппаратом (1.6) и поэтому он некоррелирован с x и y. Для того, чтобы можно было удовлетворить условиям наблюдаемости (1.12) с помощью подходящего выбора коммутаторов $[\zeta_i, \zeta_j^*]$, $[\zeta_i, \zeta_j]$, необходимо, чтобы коммутаторы $[V_i, V_j^*]$, $[V_i, V_j]$ для $V = Ky$ были c-числами.* Достаточно, очевидно потребовать

$$[\eta_k, \eta_l^*] = C_{kl}\,\mathbf{1}, \quad [\zeta_i, \zeta_j^*] = -(KCK)_{ij}\,\mathbf{1}, \tag{2.1}$$

где C_{kl} — комплексные числа, образующие матрицу C, и аналогично для $[\eta_k, \eta_l]$, $[\zeta_i, \zeta_j]$, чтобы удовлетворить (1.12). Таким образом, квантовое обобщение линейного оценивания и фильтрации естественно формулируется только для бозонных [3] каналов, получаемых квантованием (2.1). При этом, как и в классическом случае, достаточно задавать лишь одну из корреляционных матриц $N_\pm$ или матрицу $N = (N_+ + N_-)/Z$, ибо $N_+ - N_- = C$. Обе матрицы N и C могут зависеть от времени.

Теорема 1. Оптимальная по критерию (1.5), оценка состояния систем, описываемой уравнением (1.1) и бозооным каналом (1.3), удовлетворяет уравнению (1.7), где $L(t)$ — матрица (1.8), а $z(t)$ — результат измерения(векторной наблюдаемой величины (1.6). Оптимальное наблюдение (1.6) описывается «нулевым» бозонным шумом $\zeta(t)$, имеющим нулевые ожидания $E\{\zeta_i\} = 0$ и корреляции $\langle\zeta_i(t)\,|\,\zeta_j(s)\rangle_+ = E\{\zeta_i(t)\,\zeta_j(s)^*$, $\langle\zeta_i(t)\,|\,\zeta_j(s)\rangle = E\{\zeta_i(s)^*\zeta_i(t)\}$ s — образного вида

$$\langle\zeta(t)\,|\,\zeta(s)\rangle = M_{\neq}\,\delta(t-s), \tag{2.2}$$

где $M_\pm = M_\pm(t)$ — эрмитовы матрицы, определяемые при каждом t соотношениями

$$M_+ + M_- = |\,KCK^+G\,|\,G^{-1}, \quad M_+ - M_- = -KCK^+, \tag{2.3}$$

а матрица $K = K(t)$ для каждого t удовлетворяет уравнению

$$KR + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,(KCK^+G)\;KC = T, \tag{2.4}$$

где $T = T(t)$ и $R = R(t)$ есть матрицы (1.9), определяемые рекуррентной системой (1.10)–(1.11).

Заметим, что, как показано в [3], в невырожденных случаях уравнение (1.16) имеет единственное решение $K = T_+R_+^{-1} + T_-R_-^{-1}$, где

$$T\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \mathrm{sign}\,(T(R_1^{-1} - R_+^{-1})\,T^+G))\,T, \tag{2.5}$$

а $R_\pm = DSD^+ + N \pm \frac{1}{2}C$. Условие невырожденности есть условие положительной определенности

$$T_+(R_+^{-1}R_+^{-1}R_-R_+^{-1})T_+^+ + T_-(R_-^{-1} - R_-^{-1}R_+R_-^{-1})T_-^+ > 0, \tag{2.6}$$

которое при $n \leq m$ может быть записано в виде неравенства

$$(R_-^{-1} + R_+^{-1})\;T^+GT > |(R^{-1} - R_+^{-1})T^+GT|.$$

Доказательство. Первое предложение теоремы уже доказано. Подставляя (1.7) в (1.5) и производя замену

$$\tilde{x}(t) = x(t) - A(t)\,\hat{x}(t-1), \quad \tilde{y}(t) = y(t) - D(t)\,A(t)\,\hat{x}(t-1), \tag{2.7}$$

получим, что задача оптимизации наблюдения (1.6) сводится для каждого t к статической задаче минимизации ошибки $R = E\{\|\tilde{z} - \tilde{x}\|_G^2\}$ линейного оценивания $\tilde{z} = K\tilde{y} + \zeta$, которая в вещественном случае была рассмотрена в [10]. Учитывая, что $E\{\|\cdot\|_*^2\} = \mathrm{Tr}\,G\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle$, представим среднеквадратичную ошибку (1.5) в виде $R = E\{\|\tilde{z} - \tilde{x}\|_G^2\}$ (Т[означает след), или

$$R = \mathrm{Tr}\,G(S - TK^+ - KT^+ + KRK^+ + M), \tag{2.8}$$

* c-числами называются элементы кпатные единице I (единичному оператору в H).

где $S = \langle \tilde{x} \,|\, \tilde{x} \rangle$, $T = \langle \tilde{x} \,|\, \tilde{y} \rangle$, $R = \frac{1}{2}(R_+ + R_-)$, $M = \frac{1}{2}(M_+ + M_-)$ $R_\pm = \langle \tilde{y} \,|\, y \rangle^+$, $M_\pm = \langle \zeta \,|\, \zeta \rangle_\pm$, $R_+ - R = C$, $M_+ - M_- = -KCK^+$. Поскольку $\tilde{x}$, $\tilde{x}$ удовлетворяют уравнениям

$$\tilde{x}(t) = A(t)\left(x(t-1) - z(t-1)\right) + \xi(t),\ \tilde{y}(t) = D(t)\,\tilde{x}(t) + \eta(t), \tag{2.9}$$

матрица S в момент t определяется корреляционной матрицей P ошибки $\tilde{z} - \tilde{x}$ в предыдущий момент $t-1$ согласно уравнению (1.11), а матрицы T и R связаны с S соотношениями (1.9).

Минимизация выражения (2.8) по корреляционным матрицам M, удовлетворяющим неравенству Гейзенберга $M \geq \pm\frac{1}{2}KCK^+$ дает [10]: $M = |KCK^+G\,|\,(2G)^{-1}$,

$$R = \operatorname{Tr} G(S - TK^+ - KT^+ + KRK^+) + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}|GKCK^+|. \tag{2.10}$$

Приравнивая производную по K^+ от (2.10) к нулю, получим уравнение (2.4), из которого, в частности, следует выражение (1.10) для $P = \langle \tilde{z} - \tilde{x} \,|\, \tilde{z} - \tilde{x} \rangle$. Это завершает доказательство. Отметим, что при невыполнении условия (2.6) оптимальные линейные оценки вырождены, и для их отыскания необходимо дополнительно раскрывать неопределенность сигнатуры вырожденной матрицы KCK^+G (см. по этому поводу пример в [10]).

Рассмотрим теперь квантовую линейную фильтрацию с непрерывным временем, когда состояние $x(t)$ изменяется согласно стохастическому дифференциальному уравнению

$$x(t) = A(t)\,x(t) + \xi(t),\ x(t)_0 = x_0, \tag{2.11}$$

где $\xi(t)$ — δ — коррелированный шум (1.2) ($\delta(t-s)$ для непрерывных t и s означает δ-функцию Дирака). Канал, как и прежде, предполагается квантовым и линейным (1.3), где $\eta(t)$ — квантовый δ-коррелированный шум (1.4). Требуется найти оптимальное наблюдение вида (1.6) и оптимальную оценку $\hat{x}(t)$, основанную на результате этого наблюдения, а также на предыдущих оценках $\hat{x}(s)$, $s < t$, чтобы минимизировать критерий (1.5). Соответствующие результаты получаются, как и в классическом случае, с помощью стандартной замены $A \to I + A\Delta t$, $Q \to Q\Delta t$, $Q \to D\Delta t$, $N - N\Delta t$ и перехода в (1.8)—(1.11) к пределу $\Delta t - 0$ (при этом предполагается, что производные матрицы A, Q, D, N непрерывны по t). Уравнение (1.7) заменяется на дифференциальное уравнение

$$\dot{\hat{x}}(t) = L(t)\,\hat{x}(t) + z(t),\ \hat{x}(t_0) = z(t_0), \tag{2.12}$$

где $L(t) = A(t) - K(t)D(t)$. В классическом случае, согласно теореме Калмана—Бьюси [11], $\zeta = 0$, $K = SD^+N^{-1}$, где $S = S(t)$ есть решение дифференциального уравнения

$$S = AS + SA^+ + Q - KDS,\ S(t_0) = S_0. \tag{2.13}$$

Такое же решение справедливо и в квантовом случае, если процесс $x(t)$ — действительный и одномерный, а $y(t)$ — самосопряженный. В общей многомерной ситуации теорема 1 дает следующее обобщение теоремы Калмана—Бьюси:

Теорема 2. Оптимальная по критерию (1.5) оценка состояния системы описываемой уравнением (2.11) и бозонным каналом (1.3) удовлетворяет уравнению (2.12). Оптимальное наблюдение описывается «нулевым» бозонным шумом $\zeta(t)$, определяемым соотношениями (2.2), (2.3), матрица $K = K(t)$ удовлетворяет уравнению (2.4), где $R = N$, а матрица $S = S(t)$ есть решение уравнения (2.13). В невырожденном случае (2.6) матрицу K можно представить в виде $K = T_+N_+^{-1} + T_-N_-^{-1}$ с помощью факторизации (2.5) матрицы $T = SD^+$, где нужно учесть, что $R_\pm = N_\pm = N \pm \frac{1}{2}C$.

Доказательство получается из предыдущего предельным переходом $\Delta t \to 0$, при котором нужно учесть еще замену $C \to C\Delta t$, $M \to M\Delta t$. Это означает, что квантовые шумы $\eta(t)$, $\zeta(t)$, как и классический $\zeta(t)$, строго говоря, следует понимать как обобщенные производные $\eta(t) = \dot{H}(t)$, $\zeta(t) = \dot{Z}(t)$ «винеровских квантовых шумов» $H(t)$, $Z(t)$, определяемых соотношениями

$$\langle dH(t) \,|\, dH(t) \rangle_\pm = N_\pm(t)\,dt,\ \langle dZ(t) \,|\, dZ(t) \rangle_\pm = M_\pm(t)\,dt$$

(приращения dH, dZ, dH^*, dZ^* в разные моменты $t \neq s$ некоррелированы и коммутируют).

3. Оптимальная нелинейная квантовая фильтрация

В общем случае квантовый канал без памяти статистически описывается в каждый момент t_k, $k = 0, 1, 2 \ldots$ зависимостью $\varrho(x_k)$ оператора плотности ϱ_k в гильбертовом пространстве H_k квантовомеханических состояний от значения $x_k \in X_k$ входного сигнала в тот же момент t_k. (Напомним, что ϱ_k — неотрицательно-определенный оператор в H_k с единичным следом).

Квантовые измерения в моменты t_k с результатами $z_k \in Z_k$ статистически описываются распределениями вероятности $\mu_k(dz_k)$, линейно-завсиящими от ϱ_k:

$$\mu_k(dz_k) = \langle \varrho_k,\ \Pi_k(dz_k) \rangle.$$

Здесь $\Pi_k(dz_k)$ — мера со значениями в пространстве эрмитовых операторов, сопряженном к порождаемому операторами плотности пространству ядерных операторов относительно билинейной формы-следа в H_k: $\langle \varrho, \Pi_k(dz)\rangle = \operatorname{Tr}\{\varrho_k \Pi_k(dz_k)\}$. Операторно-значная мера $\Pi_k(dz_k)$ должна удовлетворять, очевидно, условиям неотрицательной определенности и нормированности $\int \Pi_k(dz_k) = \mathbf{1}_k$ на единичный оператор в H_k, классическим аналогом ее является условное распределение вероятностей [3]. Если $\widehat{X}_k$ — пространство решений в момент t_k и $\delta_k(\hat{x}^k, z_k, d\hat{x}_k)$ — некоторая рандомизированная стратегия, основанная на предшествовавших решениях $\hat{x}^k = (\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{k-1})$ и результате текущего квантового измерения z_k (т. е. распределение вероятностей на $\widehat{X}_k$, зависящее от x_k, z_k), то текущее решение $x_k \in \widehat{X}_k$ можно, очевидно, рассматривать как результат квантового измерения в момент t_k, описываемого операторно-значной мерой

$$\Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}_k) = \int_{Z_k} \Pi_k(dz_k)\, \delta_k(\hat{x}^k, z_k, d\hat{x}_k), \tag{3.1}$$

зависящей от результатов таких же измерений на предыдущих этапах. Всякую последовательность операторно-значных мер $\Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}_k)$, описывающих квантовые измерения в моменты t_k со значениями в пространствах решений $\widehat{X}_k$ и зависящих от предшествовавших решений $\hat{x}^k = (\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{k-1})$, будем называть квантовой стратегией. При этом допускаются квантовые стратегии, которые могут вовсе и не представляться в виде свертки (3.1) Множество всех допустимых квантовых стратегий представляет собой таким образом множество всех последовательностей отображений $\Pi_k : \widehat{X}^k \times \widehat{A}_k \to B_k$ множества $\widehat{X}^k = \widehat{X}_0 \times \ldots \times \widehat{X}_{k-1}$ и заданной δ-алгебры $\widehat{A}_k = A(\widehat{X}_k)$ в конус положительных операторов $B_k = B_+(H_k)$, удовлетворяющих при фиксированном $d\hat{x}_k \in \widehat{A}_k$ условию измеримости относительно $\widehat{A}^k = \widehat{A}_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{A}_{k-1}$, а при фиксированном $\hat{x}^k \in \widehat{X}^k$ — условию δ-аддитивности и нормированности на единицу $\mathbf{1}_k$ в слабом смысле. Такое множество, очевидно, является выпуклым, в то время как множество квантовых стратегий вида (3.1), рассматривавшееся в качестве допустимого множества в [7, 8], этим свойством не обладает.

Предположим, что последовательность $\{x_k\}$ является случайной с заданными вероятностными мерами на δ-алгебрах $A_k = A(X_k)$ и $c_k(\hat{x}_k, x_k)$ — заданная функция штрафов, определяющая качество оценки $\hat{x}_k$ элемента x_k в момент t_k. Задачей квантовой текущей фильтрации в широком смысле* назовем задачу нахождения оптимальной квантовой стратегии, минимизирующей в каждый момент k средний риск

$$R_k = E\{c_k(\hat{x}_k, x_k)\}.$$

Теорема 3. Для того, чтобы квантовая стратегия $\{\Pi_k\}$ была оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности эрмитовых операторов $\Lambda_k = \Lambda_k(\hat{x}^k)$, имеющих конечный след, вообще говоря, зависящих измеримо от $x^k = (\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{k-1})$, выполнялись операторные неравенства

$$R_k(\hat{x}_k, \hat{x}^k) \geq \Lambda_k(\hat{x}^k), \tag{3.2}$$

и операторные уравнения

$$(R_k(\hat{x}^k, \hat{x}_k) - \Lambda_k(\hat{x}^k))\; \Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}^k) = 0 \tag{3.3}$$

в слабом смысле, где

$$R_k(\hat{x}^k, \hat{x}_k) = \int_{X_k} c_k(\hat{x}_k, x_k)\, \varrho_k(x_k)\, \pi_k(\hat{x}^k, dx_k), \tag{3.4}$$

а $\pi_k(\hat{x}^k, dx_k)$ — апостериорное распределение вероятностей на X_k после измерения оценок $\hat{x}^k = (\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_{k-1})$.

Доказательство. Согласно общему бейесовскому подходу представим средний риск R_k в следующем виде

$$R_k = E_k\{\int_{X_k}\int_{\hat{X}_k} c_k(x_k, x_k)\, \langle \varrho_k(x_k), \Pi_k(x^k, dx_k)\rangle\}, \tag{3.5}$$

где E_k — усреднение по вероятностной мере

$$\mu_k(dx^k) = \prod_{l<k} \int_{X_l} \pi_l(x^l, dx_l)\, \langle \varrho_l(x_l), \Pi_l(x^l, dx_l)\rangle.$$

Поскольку эта мера не зависит от Π_k, R_k зависит от Π_k аффинно и достигает минимума по Π_k в некоторой крайней точке множества допустимых стратегий в момент t_k. Оптимальное Π_k доставляет минимум условному риску

$$R_k(\hat{x}^k) = \iint c_k(\hat{x}_k, x_k)\, \langle \varrho_k(x_k), \Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}_k)\rangle\, \pi_k(\hat{x}^k, dx_k)\rangle,$$

который при фиксированном $\hat{x}^k$ можно рассматривать как безусловный риск для задачи статического квантового наблюдения с априорным распределением $\pi_k(\hat{x}^k, dx_k)$. Применяя необходимые и достаточные условия для соответствующей статической задачи [3, формулы (1.4), (1.5)], получим искомое доказательство теоремы.

* В узком смысле задачей текущей фильтрации называется тот случай, когда $\widehat{X}_k = X_k$, $\widehat{A}_k = A_k$ и $c_k(\hat{x}_k, x_k) = \|\hat{x}_k - x_k\|^2_{G_k}$.

В марковской ситуации, когда задано начальное распределение вероятностей $\pi_0(dx_0)$ и переходная вероятностная мера, $\varkappa_k(x_{k-1}, dx_k)$ входящее в (3.2) апостериорное распределение π_k вычисляется методами теории условных марковских процессов согласно следующей рекуррентной формуле

$$\pi_k(\hat{x}^k, dx) = \int\limits_{X_{k-1}} \pi_{k-1}(\hat{x}^{k-1}, dx_{k-1}),\ i_{k-1}(\hat{x}_{k-1}\, x^{k-1})\, \varkappa_k(x_{k-1}, dx_k), \tag{3.6}$$

где ι_k — производная Радона—Никодима

$$\iota_k(x_k, \hat{x}^k) = \mu_k(x_k, \hat{x}^k, d\hat{x}_k) / \int\limits_{X_k} \pi_k(\hat{x}^k, dx_k)\, \mu_k(x_k, \hat{x}^k, d\hat{x}_k),$$

а

$$\mu_k(x_k, \hat{x}^k, d\hat{x}_k) = \langle \varrho_k(x_k), \Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}_k) \rangle .$$

4. Примеры

Рассмотрим несколько типичных задач оптимальной квантовой фильтрации по квадратичному критерию $c_k(\hat{x}_k, x_k) = \|\hat{x}_k - x_k\|^2_{G_k}$, $\hat{X}_k = X_k$ — векторные пространства.

1. Пусть марковская последовательность $\{x_k\}$ действительна и одномерна. Тогда оператор апостериорного риска (3.4) можно представить при каждом k в виде [2]:

$$R_k(\hat{x}_k) = (\hat{x}_k - \nu_k)\, \varrho_k(\hat{x}_k - \nu_k) + w_k - \nu_k\, \varrho_k\, \nu_k,$$

где $\varrho_k = \int\limits_{X_k} \pi_k(\hat{x}^k, dx_k)\, \varrho_k(x_k)$, оператор $\nu_k = \nu_k(\hat{x}^k)$ удовлетворяет уравнению

$$\nu_k\, \varrho_k + \varrho_k\, \nu_k = 2 \int\limits_{X_k} x_k\, \varrho(x_k)\, \pi_k(\hat{x}^k, dx_k), \tag{4.1}$$

а $w_k = \int\limits_{X_k} x_k^2 \varrho_k(x_k)\, \pi_k(\hat{x}^k, dx_k)$. Полагая $\Lambda_k = w_k - \nu_k\, \varrho_k\, \nu_k$, получим, что оптимальная фильтрация описывается при каждом k ортогональной спектральной мерой самосопряженных операторов $\nu_k(\hat{x}^k)$. Таким образом, оптимальная квантовая одномерная фильтрация сводится на каждом этапе к измерению наблюдаемой ν_k, получаемой решением уравнения (4.1) и могущей зависеть от результатов $\hat{x}_k$ измерения предыдущих наблюдаемых $\nu_0, \ldots, \nu_{k-1}$.

2. Многомерным и комплексным обобщением рассмотренного случая является следующая ситуация. Пусть оператор апостериорного риска при каждом k можно представить в виде:

$$R_k = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(\hat{x}_{ik} - \nu_{ik})^*\, \varrho_k(\hat{x}_{jk} - \nu_{jk}) + \Lambda_k(\hat{x}^k), \tag{4.2}$$

где операторы $\nu_{ik} = \nu_{ik}(\hat{x}^k)$ могут быть несамосопряженными и даже ненормальными, но имеют при каждых $x_l = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)_l$ правое собственное совместное разложение единицы $\mathbf{1}_k = \int\limits_{\mathbf{C}^m} \Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}^k)$

$$(\nu_{ik}(\hat{x}^k) - \hat{x}_{ik})\, \Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}_k) = 0 .$$

Тогда, очевидно, оптимальная фильтрация описывается стратегией Π_k, входящей в это разложение. Например, если $\nu_{ik} = \varphi_{ik}(a_k, x^k)$, где $a_k = (a_1, \ldots, a_n)_k$ — операторы уничтожения бозонов, причем зависимость от a аналитическая, то, очевидно,

$$\Pi_k(\hat{x}^k, d\hat{x}_k) = d\hat{x} \int\limits_{\mathbf{C}^n} \delta(\hat{x}_k - \varphi_k(\alpha_k, \hat{x}^k))\, |\alpha_k\rangle \langle\alpha_k|\, d\lambda(\alpha_k),$$

где $|\alpha_k\rangle$ — когерентные состояния: $a_k\,|\alpha_k\rangle = \alpha_k\,|\alpha_k\rangle$, $\delta - \delta$ — функция Дирака на $\mathbf{C}^n$, а $d\lambda$ — мера Лебега на $\mathbf{C}^n$, нормированная соответствующим образом. В рассматриваемом случае процедура квантовой фильтрации разделяется и состоит из процедуры когерентного измерения в каждый момент t_k и процедуры вынесения оценки $\hat{x}_k = \varphi_k(\alpha_k, \hat{x}^k)$ по результату α_k этого измерения, а также по предыдущим оценкам.

3. Наконец, рассмотрим гауссовский вещественный или комплексный в смысле [3], случай, когда $x_k = x(t_0 + k)$ удовлетворяет уравнению (1.1), где $\xi(t)$ — гауссовский δ-коррелированный шум (1.2), начальное условие x_0 — тоже гауссовское, а квантовый канал есть линейный канал (1.3) с гауссовским бозонным δ-коррелированным шумом (1.4). На нулевом этапе $k = 0$ задача (3.5), (3.6) совпадает со статической задачей, рассмотренной в [3]. Оптимальное по критерию (1.5) оценивание, согласно [3], сводится к δ-когерентному квазиизмерению линейных комбинаций $\nu_0 = K_0\, y(t_0)$, где матрица K_0 удовлетворяет уравнению (2.4). Каноническая реализация этого квазиизмерения есть оптимальное наблюдение (1.6). Поскольку из-за когерентности квазиизмерения на следующем этапе апостериорное распределение $(\hat{x}_0, dx_1)$ является снова гауссовским, оптимальное наблюдение на этом этапе является опять G-когерентным. Продолжая эту цепочку рассуждений, получим, что оптимальная квантовая фильтрация на каждом этапе сводится к G_k-когерентному измерению, причем ее каноническая реализация совпадает с оптимальной линейной фильтрацией, рассмотренной в разделе 2. Отметим, что если коммутационная матрица C_k неотрицательно определена, то $y(t_k) = \sqrt{C_k}\, a_k$, где a_k — операторы уничтожения бозонов, и мы имеем случай 2 с линейной функцией $\varphi_k(\alpha_k, \hat{x}^k) = K_k \sqrt{C_k}\, \alpha_k + L_k\, \hat{x}_{k-1}$. При этом факторизация (2.5) тривиальна: $T_+ = T$, $T = 0$, условие невырожденности (2.6) всегда выполняется, и $K_k = S_k D_k^+ (D_k S_k D_k^+ + N_+(t_k))$.

4. Рассмотрим для примера задачу фильтрации комплексной амплитуды классического диссипативного осциллятора

$$\dot{x}(t) + (\gamma + i\,\Omega)\,x(t) = \sqrt{2\gamma}\,\xi(t)$$

на выходе описываемой на квантовом уровне линии передачи

$$y(t) = x(t) + \sqrt{2\gamma}\,\eta(t)\,.$$

Хотя коммутатор $\eta(t)$ имеет непостоянную спектральную интенсивность $\hbar\omega$ [10], при достаточно узком диапазоне рассматриваемых частот $\Delta\omega \ll \Omega$ вблизи Ω можно считать, что

$$[\eta(t),\ \eta(t')^*] = \hbar\Omega\,\delta(t-t'),\ [\eta(t),\ \eta(t')] = 0\,.$$

Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ имеют тепловую природу с температурами T_ξ и T_η соответственно, определяющими их интенсивности согласно теореме Найквиста:

$$\langle\xi(t)\mid\xi(t')\rangle = kT_\xi\,\delta(t-t'),\quad \langle\eta(t)\mid\eta(t')\rangle = \hbar\Omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\delta(t-t')\,,$$

где $n = (\exp\{\hbar\Omega/kT_\eta\} - 1)^{-1}$ — среднее число тепловых квантов на единицу частоты. Поскольку в равновесной ситуации шумы $\xi(t)$, $\eta(t)$ гауссовские, то при начальном гауссовском распределении оптимальная фильтрация будет линейной, а оптимальное квантовое измерение — когерентным, реализуемым наблюдением классического процесса — суперпозиции $\eta+\zeta$, с «нулевым» квантовым шумом ζ, имеющим противоположный ненулевой коммутатор и минимальный коррелятор:

$$[\zeta(t),\zeta(t')^*] = -\hbar\Omega\,\delta(t-t'),\qquad \langle\eta(t)\mid\eta(t')\rangle = \frac{1}{2}\hbar\Omega\delta(t-t')\,.$$

Такая квантовая фильтрация, очевидно, статистически эквивалентна классической в канале с шумом $\eta+\zeta$, имеющим суммарную интенсивность $\hbar\Omega(n+1)$ и нулевой коммутатор.

В частности, для вычисления ошибки (диперсии s) стационарной фильтрации можно воспользоваться классической формулой:

$$s = \hbar\Omega(n+1)\,\left(\sqrt{\gamma^2 - kT_\xi/\hbar\Omega(n+1)} - \gamma\right).$$

Для идеального квантового канала температура T_η равна нулю и $n = 0$, однако ошибка S, в отличие от классического случая, не равна нулю, хотя и достигает при этом своего минимального значения, растущего с увеличением частоты «несущей» Ω.

Заключение

Предложенное в статье квантовое обобщение задачи динамической линейной и нелинейной фильтрации сводит ее к решению статической задачи оптимального наблюдения на каждом этапе благодаря выбору достаточно широкого класса допустимых стратегий. При этом оптимальная линейная фильтрация в бозонных каналах является квазиклассической и статистически эквивалентна классической фильтрации с выбранным надлежащим образом классическим каналом. Как и в классическом случае, оптимальная фильтрация в гауссовском случае оказывается линейной, основанной на результатах когерентного измерения. Как показано на примере квантовой линии передачи, учет квантовой природы каналов связи приводит к фундаментальному ограничению ошибки фильтрации, исключающему сингулярный случай прямого наблюдения.

Литература

1. *Красовский А. А.* Предельная точность микронаблюдения и микроуправления. Известия АН СССР. Техническая кибернетика **3** (1974), 177—187.

2. *Белавкин В. П.* Оптимизация обработки квантовых сигналов. Обзор. Зарубежная радиоэлектроника **5** (1975), 3—29.

3. *Белавкин В. П.*, Оптимальное наблюдение бозонных сигналов в квантовых гауссовских каналах. *Problems of Control and Information theory* **4** (1975), 241—257.

4. *Belavkin V. P.*, Optimal multiple quantum-statistical hypothesis testing. Stochastics **1** (1975), 315—345.

5. *Фон Нейман Дж.*, Математические основы квантовой механики. М., «Наука», 1967.

6. *Davis E. B.*, *Lewis I. T.*, An operational approach to quantum probability. Commun. math. phys. **17** (1970), 239—260.

7. *Baras I. S.*, *Jarger R. O.* 1. Linear filtering with quantum-mechanical measurements. 2. Conditional expectations and Fock space representations in quantum filtering. The forth international symposium on information theory. Abstracts of papers. Leningrad 1976, Part I, 172—185.

8. *Baras I. S.*, *Harger R. O.*, *Park Y. H.*, Quantum-mechanical linear filtering of random signal sequences, *IEEE IT-22* (1976), N **1**, 59—64.

9. *Стратонович Р. И.*, Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. Изд-во Моск. ун-та, 1966.

10. *Belavkin V. P.* Optimal linear randomized filtration of quantum boson signals. Problems of Control and Information theory, **3** (1974) N **1**, 45—62.

11. *Острем К.* Введение в стохастическую теорию управления. М., Мир, 1973.

Optimal quantum filtration of markovian signals

V. P. BELAVKIN

(Summary)

The paper presents a multi-step theory of quantum measurements and statistical solutions through an example of dynamic filtration of Markovian signals in quantum memoryless channels. To start with, within the framework of the Markov correlation theory a quantum generalization of the theory of linear filtration of random sequences and signals is discussed. The optimal linear filtration of one-dimensional real signal is proved to be reducible to the measurement of the optimal sequence of compatible quantum observable variables determined recursively by means of the Kalman filter.

For a complex or multi-dimensional situation, the optimal quantum linear filtration is determined for boson channels. It is reducible to optimal coherent (G-coherent [3]) measurement and Kalman processing of the measurement results. In continuous time, the optimal linear quantum filtration coincides with the classical Kalman-Bucy filtration where the result of the optimal (in the multi-dimensional boson case, G-coherent) continuous quantum measurement is regarded as observed signal.

A general procedure is presented for reduction of optimal nonlinear quantum filtration to a sequence of Bayes optimizations of statistical observations. In the Markovian case, for each problem of this kind the *a priori* distribution is computed recurrently through techniques of the Stratonovich theory of conditional Markov processes. Those cases are considered as examples where solutions of corresponding statistical problems are known. In particular, the linear dynamic quantum filtration is proved to be absolutely optimal in the Gaussian case. The results obtained are illustrated through an example of optimal point estimation of the state of the classical dissipative oscillator at the output of a quantum information transmission line.

В. П. Белавкин
Московский институт электронного машиностроения,
кафедра прикладной математики
СССР, Москва 109028,
Б. Вузовский пер., 3/12