ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 26, № 3
март 1976

ОБ ОБОБЩЕННЫХ СООТНОШЕНИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА И ЭФФЕКТИВНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ В КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

В. П. Белавкин

Рассматриваются два варианта квантово-статистического обобщения неравенства Рао – Крамера, устанавливающие инвариантную нижнюю границу квадратичной ошибки обобщенного квантового измерения. В отличие от варианта Хелстрома [1] предложенный комплексный вариант этого неравенства приводит к точной формулировке обобщенного принципа неопределенности Гейзенберга для произвольных состояний. Находится граница точности оценивания параметров канонических состояний, в частности канонических параметров группы Ли. Доказывается, что рассматриваемые границы являются точными только для канонических состояний, для которых существуют эффективные измерения и квазиизмерения.

ВВЕДЕНИЕ

Развиваемая в последние несколько лет теория обобщенных квантовых измерений (см. обзор [2] и цитируемую в нем литературу) позволила ввести понятие квазиизмерения несовместимых наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами, с помощью которого удалось решить ряд задач квантовой теории информации и связи [3–8], дать для чистых состояний точную формулировку обобщенного принципа неопределенности Гейзенберга для таких величин, например, как фаза и число квантов [9] и, наконец, строго определить, что такое измерение фазы квантового поля [8, 9]. Согласно этой теории каждое квантовое измерение, понимаемое в обобщенном смысле, описывается некоторым разложением единичного оператора в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ состояний наблюдаемой квантовой системы:

$$\hat{1}=\int \Pi(dx), \tag{1}$$

здесь $\Pi(\cdot)$ – отображение σ-алгебры $\mathscr{B}$ некоторого измеримого пространства $X\ni x$ во множество эрмитовых неотрицательно определенных операторов в $\mathscr{H}$. Если ρ – оператор плотности (*ОП*) некоторого состояния квантовой системы, то вероятность $P(B)$ события $x\in B$ $(B\in\mathscr{B})$ при таком измерении вычисляется по формуле

$$P(B)=\operatorname{Tr}\rho\Pi(B) \quad (\operatorname{Tr}\text{ означает след}).$$

Если разложение (1) ортогонально: $\Pi(A)\Pi(B)=0$ при $A\cap B=\varnothing$, то обобщенное измерение сводится к обычному, описываемому эрмитовым оператором

$$\hat{x}=\int x\Pi(dx), \quad x\in\mathbf{R}. \tag{2}$$

Для неортогональных разложений взаимно однозначного соответствия между (1) и (2) нет. Соответствующие измерения, называемые далее квазиизмерениями, не описываются эрмитовыми операторами, однако их часто можно описать неэрмитовыми (ненормальными) операторами (см. раздел 3) или более обще семействами некоммутирующих эрмитовых операторов.

Существует тесная связь между понятием квазиизмерения и понятием косвенного квантового измерения (косвенное измерение это обычное измерение в расширенной квантовой системе, включающей исходную систему как часть [3]). Эта связь устанавливается известной теоремой Наймарка о существовании для всякого неортогонального разложения единицы ортогонального продолжения в некотором расширенном гильбертовом пространстве, включающем пространство $\mathscr{H}$ в качестве подпространства.

Введенное понятие квазиизмерения позволяет дать точную формулировку обобщенному принципу неопределенностей Гейзенберга для таких величин, как время и энергия, фаза и число квантов, угол поворота и момент вращения. Первые из этих величин – время, фаза и угол, как известно, не описываются эрмитовыми операторами в $\mathscr{H}$, однако их измерение может быть описано статистически как оценка соответствующих параметров квантовых состояний. Как доказал Хелстром [9] с помощью предложенного им квантового аналога неравенства, известного в классической математической статистике под названием неравенства Рао – Крамера [11], для чистых состояний дисперсии результатов любых измерений, дающих такую оценку, не могут быть ниже некоторого уровня, обратно пропорционального дисперсиям генераторов унитарных представлений соответствующих групп смещений (т. е. операторов энергии, числа квантов или момента). Например, если чистое состояние известно с точность до фазы, то оно унитарно-эквивалентно некоторому заданному состоянию $|\Psi_0\rangle\in\mathscr{H}$ и описывается семейством

$$|\Psi_\vartheta\rangle=e^{i\vartheta\hat{n}/\hbar}|\Psi_0\rangle,$$

где $\hat{n}$ есть оператор числа квантов, который является генератором представления $e^{i\vartheta\hat{n}/\hbar}$ группы фазовых смещений ϑ. Если некоторое разложение единицы (1) определяет при каждом ϑ вероятности $P_\vartheta(dx)=\langle\Psi_\vartheta|\Pi(dx)|\Psi_\vartheta\rangle$, для которых $\int xP_\vartheta(dx)=\vartheta$, и результаты соответствующего измерения x принимаются за оценку $\hat{\vartheta}$ неизвестного значения фазы ϑ, то дисперсия $\langle(\hat{\vartheta}-\vartheta)^2\rangle_\vartheta=\int(x-\vartheta)^2P_\vartheta(dx)$, описывающая точность измерения ϑ, не может быть ниже уровня $\hbar^2/4\langle\Psi_0|(\hat{n}-n_0)^2|\Psi_0\rangle$, где $n_0=\langle\Psi_0|\hat{n}|\Psi_0\rangle$. Это и есть полученная Хелстромом точная формулировка принципа неопределенностей Гейзенберга для сопряженных величин ϑ и $\hat{n}$, первая из которых описывается некоторым обобщенным измерением, удовлетворяющим «условию несмещенности» $\langle\hat{\vartheta}\rangle_\vartheta\equiv\int xP_\vartheta(dx)=\vartheta$.

В разделе 1 приводится инвариантная формулировка (1.4) обобщенного Хелстромом неравенства Рао – Крамера, а также рассматривается дру-

Поскольку для ковариации $\mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}-\vartheta)h^*$ справедливо неравенство Шварца

$$|\mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}-\vartheta)h^*|^2 \leqslant \mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}-\vartheta)(\hat{x}-\vartheta)^*\mathrm{Tr}\,\rho hh^*, \tag{П.2}$$

представляющее собой условие неотрицательности детерминанта 2×2 матрицы ковариаций $\mathrm{Tr}\,\rho h_i h_k^*$, $i=0,1$, где $h_0=(\hat{x}-\vartheta)$, $h_1=h$, то можно записать

$$\mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}-\vartheta)(\hat{x}^*-\overline{\vartheta}) \geqslant \left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}\right|^2 \Big/ \mathrm{Tr}\,\rho hh^*. \tag{П.3}$$

Это неравенство, очевидно, устанавливает нижнюю границу для дисперсии оценивания параметра $\vartheta=\vartheta(\alpha,\overline{\alpha})$ в классе обычных измерений, описываемых нормальными операторами $\hat{x}$. Но поскольку условие нормальности $\hat{x}\hat{x}^*=\hat{x}^*\hat{x}$ при выводе (П.3) не использовалось, эта граница является нижней для дисперсии любых оценок $\hat{\vartheta}$, получаемых в результате произвольных обобщенных измерений, которые описываются в $\mathscr{H}$ разложениями единицы $\hat{1}=\int\Pi(dx)$, $x\in\mathrm{C}$, могущими быть и неортогональными. В самом деле, из неотрицательной определенности

$$(\hat{x}-x)\Pi(dx)(\hat{x}-x)^* \geqslant 0 \quad (\Pi\geqslant 0) \tag{П.4}$$

следует, что имеет место неравенство

$$\int|x-\vartheta|^2\Pi(dx) \geqslant (\hat{x}-\vartheta)(\hat{x}-\vartheta)^*, \tag{П.5}$$

где $\hat{x}=\int x\Pi(dx)$, $\vartheta=\mathrm{Tr}\,\rho\hat{x}$. Беря математическое ожидание от обеих частей (П.4) и учитывая, что дисперсия R оценивания $\hat{\vartheta}=x$ равна $\mathrm{Tr}\,\rho\int|x-\vartheta|^2\Pi(dx)$, получим вместе с (П.3)

$$R \geqslant \mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}-\vartheta)(\hat{x}-\vartheta)^* \geqslant |D|^2/H, \tag{П.6}$$

где обозначено $D=\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\alpha}$, $H=\mathrm{Tr}\,\rho hh^*$. Тем самым для одномерного случая неравенство (1.7) доказано.

2. Равенство в (П.5) достигается, если, во-первых, математические ожидания обеих частей (П.5) совпадают, и, во-вторых, неравенство Шварца обращается в равенство. Первое условие фактически устанавливает в (П.5) равенство. Точнее, имеет место следующая

Лемма. *Пусть области значений $\rho(\alpha,\overline{\alpha})\mathscr{H}$ ОП из некоторого семейства $\{\rho(\alpha,\overline{\alpha}),\alpha\in O\}$ порождают все $\mathscr{H}$. Тогда равенство $\mathrm{Tr}\,\rho A=0$ для любого неотрицательно определенного оператора A в $\mathscr{H}$ и всех $\alpha\in O$ означает, что $A=0$.*

Достаточно доказать, что в $\mathscr{H}$ нет вектора $|\chi\rangle$ вида $|\chi\rangle=\rho^{1/2}|\psi\rangle$, для которого $\langle\chi|A|\chi\rangle\neq 0$. Но это следует из известного неравенства

$$\mathrm{Tr}\,\rho^{1/2}A\rho^{1/2} \geqslant \langle\psi|\rho^{1/2}A\rho^{1/2}|\psi\rangle,$$

имеющего место для любого неотрицательного A при $\langle\psi|\psi\rangle=1$.

Применяя этот результат к оператору A, равному разности правой и левой частей (П.5), получим, что в условиях леммы равенство в (П.5) имеет место лишь при

$$(\hat{x}-x)\Pi(dx)(\hat{x}-x)^*=0 \quad \text{или} \quad \hat{x}\Pi(dx)=x\Pi(dx).$$

Это доказывает, что для существования правоэффективного оценивания в некоторой области $O\ni\alpha$ необходимо существование оператора минимальной достаточной статистики $\hat{x}$, обладающего правым собственным разложением единицы в подпространстве, порожденном подпространствами $\rho(\alpha,\overline{\alpha})\mathscr{H}$. В вещественном случае $x\in\mathrm{R}$ такой оператор, очевидно, эрмитов.

Второе условие равенства в (П.5) эквивалентно условию линейной зависимости $\rho h=\overline{\lambda}\rho(x-\vartheta)$, где $\lambda=D/R$ при выполнении первого равенства в (П.5). Распространяя это условие на всю область $O\ni\alpha$, в которой предполагается выполненным

условие аналитичности (3.5): $\partial\lambda/\partial\overline{\alpha}=0$, получим уравнение $\partial\rho/\partial\alpha=\lambda\rho(x-\vartheta)$ относительно $\rho=\rho(\alpha,\overline{\alpha})$. Его решение с граничным условием $\rho(\alpha_0,\overline{\alpha}_0)=\rho_0$ имеет канонический вид (2.1), где $\int_{\alpha_0}^{\alpha}\lambda(\alpha)\,d\alpha=\beta(\alpha)$ – аналитическая функция, а $\hat{x}$ – оператор правоэффективной статистики. Это и доказывает для одномерного случая необходимость каноничности ОП $\rho(\alpha,\overline{\alpha})$ для существования правоэффективного оценивания, сформулированную в теореме 2. Для вещественного случая $\hat{x}^*=\hat{x}$ это также доказывает необходимость теоремы 1.

3. Многомерное обобщение получается, если взять в качестве $\hat{x}-\vartheta$ и h суммы $(\hat{x}^i-\vartheta^i)\overline{\eta_i}$, $h_k\overline{\xi^k}$, где η_i, $i=1,\ldots,m$, ξ^k, $k=1,\ldots,n$,– комплексные числа. Учитывая, что при этом $\mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}-\vartheta)h^*=\overline{\eta}_i\dfrac{\partial\vartheta^i}{\partial\alpha^k}\xi^k$, получим из (П.2) при $\xi^k=(H^{-1}D^+)^{ki}\eta_i$ последнее из неравенств

$$R^{ik}\overline{\eta}_i\eta_k \geqslant \mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x}^i-\vartheta^i)(\hat{x}^k-\vartheta^k)^*\eta_i\eta_k \geqslant (DH^{-1}D^+)^{ik}\overline{\eta}_i\eta_k,$$

справедливое для произвольных $\hat{x}^i$, для которых $\mathrm{Tr}\,\rho\hat{x}^i=\vartheta^i$. Полагая $\hat{x}^i=\int x^i\Pi dx$, где $\int\Pi(dx)=\hat{1}$, $x\in\mathrm{C}^m$,– разложение единицы, описывающее оценивание $\hat{\vartheta}^i=x^i$, и применяя неравенство (П.5) для $\hat{x}=\hat{x}^i\overline{\eta_i}$, $\vartheta=\vartheta^i\overline{\eta_i}$, получим для матрицы R ковариаций $\hat{\vartheta}^i$ первое из неравенств (П.6), откуда в силу произвольности η_i следует (1.7).

Неравенство (П.6) обращается в равенство при $\alpha\in O$ лишь в случае, если $\hat{x}^i\Pi(dx)=x^i\Pi(dx)$, и $\partial\rho/\partial\overline{\alpha}^k=\overline{\lambda}_{ki}\rho(x^i-\vartheta^i)$, где $\lambda_{ik}=(R^{-1}D)_{ik}$, откуда с учетом условий регулярности λ_{ik} получим (2.1).

Московский институт
электронного машиностроения

Поступила в редакцию
20 июня 1975 г.

Литература

[1] C. W. Helstrom. Phys. Lett., 25A, 101, 1967.
[2] В. П. Белавкин. Зарубежная радиоэлектроника, 5, 3, 1975.
[3] В. П. Белавкин. Канд. дисс., МГУ, 1972.
[4] R. L. Stratonovich. Stochastics, 1, 87, 1973.
[5] H. Yuen, M. Lax. Trans. IEEE, IT-19, 6, 740, 1973.
[6] V. P. Belavkin. Stochastics, 1, 315, 1975.
[7] В. П. Белавкин, Б. А. Гришанин. Проблемы передачи информации, 4, 44, 1973.
[8] В. П. Белавкин. Радиотехника и электроника, 17, 12, 2527, 1972; 20, 6, 1975.
[9] C. W. Helstrom. Int. J. of Theor. Phys., 8, 5, 361, 1973; 11, 357, 1974.
[10] V. P. Belavkin. Problems of control and information theory, 3, 3, 1975.
[11] К. Р. Рао. Линейные статистические методы, «Мир», 1968.
[12] Г. А. Зайцев. Алгебраические проблемы математической физики, «Наука», 1974.

ON GENERALIZED UNCERTAINTY RELATIONS AND EFFICIENT MEASUREMENTS IN QUANTUM SYSTEMS

V. P. Belavkin

Two kinds of quantum-statistical generalization of the Rao — Kramer inequality are considered which are used for finding an invariant lower bound for the mean square error of a generalized quantum measurement. Unlike the Helstrom inequality [1], the proposed complex generalization leads to an exact formulation of generalized Heisenberg uncertainty principle for arbitrary state. A lower bound to the variance of an unbiased estimate of parameters of canonical quantum state is derived, in particular, for the estimation of local canonical parameters of an arbitrary Lie group. It is proved that the lower bounds considered are globally attainable if and only if the states are canonical ones, for which an efficient real measurement or complex quasi-measurement does exist.

ложения (3.6)). Для этого достаточно учесть представление

$$\hat{x}_i = \int x_i \Pi(dx), \quad \hat{x}_i\hat{x}_k^* = \int x_i\bar{x}_k \Pi(dx), \tag{3.8}$$

получаемое интегрированием уравнений в (3.6) $x \in \mathbf{C}^n$, а также сопряженного уравнения $\Pi(dx)\hat{x}_k^* = \bar{x}_k\Pi(dx)$. Вследствие (3.8) ковариации

$$R_{ik} = \int (x_i - \vartheta_i)(\bar{x}_k - \bar{\vartheta}_k)\,\mathrm{Tr}\,\rho\Pi(dx) \tag{3.9}$$

оценок $\hat{\vartheta}_k$, полученных на основе квазиизмерения операторов $\hat{x}_k$, совпадают с ковариациями S_{ik} этих операторов, что и доказывает эффективность этого квазиизмерения для ОП (2.1). Доказательство обратного утверждения теоремы 2 следует из самого вывода неравенства (1.7) и помещено в приложении.

3. Итак, условие (правой) эффективности требует существования коммутирующих операторов, имеющих совместное правое спектральное разложение и играющих роль достаточной статистики, которую естественно назвать правоэффективной. При этом достаточно ограничиваться рассмотрением этих операторов в минимальном подпространстве, порождаемом областями $\rho(\beta, \bar{\beta})\mathscr{H}$ с ОП $\rho(\beta, \bar{\beta})$ для тех $\beta(\alpha) \in \mathbf{C}^n$, для которых $\alpha \in \mathcal{O}$. Даже если рассматриваются лишь вещественные значения параметров $\vartheta_k(\alpha, \bar{\alpha})$, оптимальное оценивание может описываться неэрмитовыми и некоммутирующими с сопряженными операторами правоэффективных статистик и не являться поэтому эффективными по Хелстрому. Однако оценки, эффективные по Хелстрому в соответствии с теоремой 1, соответствуют тому частному случаю правой эффективности, при котором операторы $\hat{x}_k$ эрмитовы. Если операторы $\hat{x}_k$ в (2.1) не эрмитовы, но коммутируют с сопряженными, то правоэффективные оценки также совпадают с комплексифицированными оценками, эффективными по Хелстрому. Однако коммутативность $\hat{x}_k\hat{x}_i^* = \hat{x}_i^*\hat{x}_k$ может и не иметь места.

Пример. Пусть $\hat{x}_k = \varphi_k(a)$, где φ_k — целые функции $\mathbf{C}^r \to \mathbf{C}$, $a = \{a_i, i=1, \ldots, r\}$ — операторы уничтожения бозонов, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $a_ia_j - a_ja_i = 0$, $a_ia_j^* - a_j^*a_i = \hat{1}$. Хорошо известно, что операторы a обладают правыми собственными векторами $|\alpha\rangle \in \mathscr{H}$, $\alpha \in \mathbf{C}^r$, определяющими неортогональное разложение единицы

$$\hat{1} = \int |\alpha\rangle\langle\alpha| \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\pi}\, d\,\mathrm{Re}\,\alpha_i d\,\mathrm{Im}\,\alpha_i, \qquad a_i|\alpha\rangle = \alpha_i|\alpha\rangle.$$

Очевидно, что и операторы $\hat{x} = \varphi(a)$ имеют правое собственное разложение единицы (3.5), где

$$\Pi(dx) = dx \int \delta(x - \varphi(a))\,|\alpha\rangle\langle\alpha| \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{\pi}\, d\,\mathrm{Re}\,\alpha_i d\,\mathrm{Im}\,\alpha_i$$

(dx — мера Лебега на $\mathbf{C}^n$, а $\delta(x-\varphi)$ — δ-функция Дирака). Следовательно, оптимальное оценивание параметров $\vartheta_k = \dfrac{\partial \ln \chi}{\partial \bar{\beta}^k}$ ОП (2.1) при $\hat{x} = \varphi(a)$ является правоэффективным и сводится к когерентному измерению и вынесению оценки $\hat{\vartheta} = \varphi(\alpha)$ по результату α. Для частного случая, когда

функция $\varphi(a)$ линейная, а состояние ρ_0 гауссово, этот факт установлен в [5].

Отметим, что наряду с правыми и левыми нижними границами можно рассматривать и другие комбинированные границы с помощью факторизации [10] $\vartheta = \vartheta_+ + \vartheta_-$, определяя правые производные по ϑ_+ и левые — по ϑ_-. Интересен вопрос, исчерпывается ли класс эффективных статистик статистиками, для которых достигается хоть одна такая граница?

4. В заключение рассмотрим вопрос о (правой) эффективности оценивания самих параметров β^k канонических семейств (2.1). Соответствующее этому случаю $\vartheta^k = \beta^k$ неравенство (1.7) имеет вид $R \geqslant H^{-1}$, где H — матрица производных (2.5). Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathrm{Tr}\,\hat{x}_k\rho_0 = 0$.

Теорема 3. *Неравенство $R \geqslant H^{-1}$ обращается в равенство в том и только том случае, когда операторы $\hat{x}_k$ в* (2.1) *имеют правое совместное разложение единицы* (3.5), *производящая функция моментов* (2.2) *этих операторов в состоянии ρ_0 гауссова: $\chi(\beta, \bar{\beta}) = \exp\{\bar{\beta}^i H_{ik}\beta^k\}$, где H_{ik} не зависит от $\bar{\beta}$ и β, а в качестве оценок $\hat{\beta}^k$ выбираются линейные функции $y^k = (H^{-1})^{ki}x_i$ результатов x_k совместного квазиизмерения наблюдаемых $\hat{x}_k$.*

Доказательство достаточности сформулированных условий для существования правоэффективного оценивания очевидно: из того, что матрица H совпадает с ковариационной матрицей S операторов $\hat{x}_k$ следует, что ковариационная матрица $R = H^{-1}SH^{-1}$ равна H^{-1}.

Необходимость же следует из необходимых условий правой эффективности теоремы 2, согласно которой семейство $\rho(\beta, \bar{\beta})$ должно иметь также вид

$$\rho(\beta, \bar{\beta}) = \psi^{-1} e^{\vartheta_k \hat{y}^{k*}} \rho_0 e^{\bar{\vartheta}_k \hat{y}^k}, \tag{3.10}$$

где $\psi = \mathrm{Tr}\,\rho_0 e^{\bar{\vartheta}_k\hat{y}^k} e^{\vartheta_k\hat{y}^{k*}}$, $\dfrac{\partial}{\partial\vartheta_k}\ln\psi = \beta^k$, а операторы y^k обладают совместным правым разложением единицы

$$\hat{1} = \int \Pi(dy), \qquad \hat{y}^k\Pi(dy) = y^k\Pi(dy), \qquad y = \{y^k\} \in \mathbf{C}^n.$$

Сравнивая (3.1) и (2.1), получим $\vartheta_k\hat{y}^k = \bar{\beta}^k\hat{x}_k$, откуда

$$\vartheta_k = H_{ki}\bar{\beta}^i, \qquad \psi(\vartheta, \bar{\vartheta}) = \chi(\beta, \bar{\beta}) = \bar{\beta}^i H_{ik}\beta^k, \qquad \hat{y}^k = (H^{-1})^{ki}\hat{x}_i.$$

Теорема 3 доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВА (1.7)

1. Рассмотрим вначале одномерный случай. Пусть $\hat{x}$ — неэрмитов оператор в $\mathscr{H}$, для которого

$$\mathrm{Tr}\,\hat{x}\rho(\alpha, \bar{\alpha}) = \vartheta(\alpha, \bar{\alpha}). \tag{П.1}$$

Дифференцируя (П.1) по α и используя определение (1.5) и условие нормировки $\mathrm{Tr}\,\rho(\alpha, \bar{\alpha}) = 1$, согласно которому $\mathrm{Tr}\,\rho h^* = 0$, имеем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\alpha} = \mathrm{Tr}\,\rho(\hat{x} - \vartheta)h^*.$$

мействами ОП,

$$\rho(\varkappa)=\chi^{-1}(\varkappa)\, e^{\varkappa^k \hat{x}_k/2}\rho_0 e^{\varkappa^k \hat{x}_k/2} \tag{3.1}$$

с нулевой мнимой частью $\operatorname{Im}\beta^k=0$:

$$\vartheta_k(\varkappa)=\operatorname{Tr}\rho(\varkappa)\hat{x}_k=\partial\ln\chi/\partial\varkappa^k. \tag{3.2}$$

Выбирая в качестве параметров α^k канонические параметры $\varkappa^k$, получим простым дифференцированием оператор-функции (3.1) симметризованные логарифмические производные по $\varkappa^k$: $g_k=\hat{x}_k-\vartheta_k$. Ковариации (1.2), таким образом, совпадают с ковариациями операторов $\hat{x}_k$:

$$G_{ik}=\operatorname{Tr}\rho(\varkappa)(\hat{x}_i-\vartheta_i)(\hat{x}_k-\vartheta_k)=\frac{\partial^2\ln\chi}{\partial\varkappa^i\,\partial\varkappa^k}, \tag{3.3}$$

которые равны производным $\partial\vartheta_i/\partial\varkappa^k$, определяющим матрицу D в (1.4). Неравенство (1.4) принимает, следовательно, форму $R\geqslant G$ или $\|R_{ik}-G_{ik}\|\geqslant 0$, где $R_{ik}=\langle(\hat{\vartheta}_i-\vartheta_i)(\hat{\vartheta}_k-\vartheta_k)\rangle$ — ковариации несмещенных оценок $\hat{\vartheta}_k$: $\langle\hat{\vartheta}_k\rangle=\vartheta_k$. Если в качестве таких оценок брать результаты x_k измерения наблюдаемых $\hat{x}_k$ (которые совместимы), то матрица R принимает минимальное значение $R=G$. Итак, для канонических семейств (3.1) с коммутирующими $\hat{x}_k$ существует эффективное по Хелстрому измерение функций (3.2) канонических параметров $\varkappa_k$, которое является обычным совместным измерением наблюдаемых $\hat{x}_k$. Область этой эффективности, очевидно, совпадает со всей областью $O\subset\mathbf{R}^n$, для которой $\chi(\varkappa)<\infty$, $\varkappa\in O$. Оказывается, что имеет место и обратное утверждение в следующем смысле.

Пусть оценки $\hat{\vartheta}_k$ (т. е. результаты некоторого измерения) имеют дифференцируемые в некоторой области математические ожидания $\vartheta_k(\alpha)$ и ковариации $R_{ik}(\alpha)$ и пусть матрицы $R=\|R_{ik}(\alpha)\|$, $D=\|\partial\vartheta_i/\partial\alpha^k\|$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^i}(R^{-1}D)_k{}^j=\frac{\partial}{\partial\alpha^k}(R^{-1}D)_i{}^j \tag{3.4}$$

(«условия регулярности»). В этом случае можно ввести канонические параметры $\varkappa^k=\varkappa^k(\alpha)$, определенные производными $\partial\varkappa^i/\partial\alpha^k=2(R^{-1}D)_k{}^i$ однозначно, если положить $\varkappa^k(\alpha_0)=0$ для некоторого α_0. Легко проверить, что для семейства ОП $\rho(\alpha)$ канонического вида (3.1), где $\varkappa^k=\varkappa^k(\alpha)$ — дифференцируемые функции с отличным от нуля якобианом, условия регулярности удовлетворяются для эффективного измерения при $\vartheta_k(\alpha)=$ $=\dfrac{\partial}{\partial\varkappa^k}\ln\chi(\varkappa(\alpha))$: $R_{ik}=G_{ik}(\varkappa(\alpha))$ и $2(R^{-1}D)_k{}^i=\partial\varkappa^i/\partial\alpha^k$. Доказательство обратного утверждения о том, что при выполнении условий регулярности глобальная эффективность по Хелстрому имеет место только для канонических семейств (3.1), дано в приложении для более общей комплексной ситуации.

Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *При соответствующих условиях регулярности для обращения неравенства (1.4) в равенство в некоторой области $O\subset\mathbf{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы семейство ОП $\rho(\alpha)$ имело канонический вид (3.1), где $\hat{x}_k$, $k=1,\ldots,n$, эрмитовы коммутирующие операторы в $\mathscr{H}$, а канонические параметры $\varkappa^k$, $k=1,\ldots,n$, есть функции параметров α, определяемые уравнениями*

$$\partial\ln\chi/\partial\varkappa^k=\vartheta_k(\alpha),\quad k=1,\ldots,n.$$

2. Пусть в некоторой области $O\subset\mathbf{C}^n$ несмещенные оценки $\hat{\vartheta}_k$ имеют математические ожидания $\vartheta_k(\alpha,\bar{\alpha})$ и ковариации $R_{ik}(\alpha,\bar{\alpha})$, удовлетворяющие условиям регулярности (3.4), к которым присоединим условие аналитичности

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\alpha}^k}R^{-1}D=0. \tag{3.5}$$

В этом случае, как и в п. 1, можно ввести канонически сопряженные параметры $\beta^k=\beta^k(\alpha)$ с помощью уравнений $\partial\beta^i/\partial\alpha^k=(R^{-1}D)_k{}^i$ и условий $\beta^k(\alpha_0)=0$ для некоторого $\alpha_0\in O$, причем функции $\beta^k(\alpha)$ в силу условия (3.6) являются аналитическими.

Теорема 2. *В сформулированных условиях регулярности неравенство (1.7) в некоторой области $O\subseteq\mathbf{C}^n$ тогда и только тогда обращается в равенство, когда семейство $\{\rho(\alpha,\bar{\alpha}),\alpha\in O\}$ имеет канонический вид (2.1), где $\rho_0=\rho(\alpha_0,\bar{\alpha}_0)$ для некоторого $\alpha_0\in O$, операторы $\hat{x}_k$, $k=1,\ldots,n$, совместно обладают в $\mathscr{H}$ правым собственным разложением единицы*

$$\hat{1}=\int\Pi(dx),\quad \hat{x}_k\Pi(dx)=x_k\Pi(dx),\quad x=\{x_k\}\in\mathbf{C}^n, \tag{3.6}$$

а параметры β^k, $k=1,\ldots,n$, являются аналитическими функциями $\beta^k(\alpha)$, определяемыми уравнениями

$$\frac{\partial\ln\chi}{\partial\beta^k}=\vartheta_k(\alpha,\bar{\alpha}),\quad \alpha\in O.$$

Оптимальное оценивание при этом сводится к квазиизмерению неэрмитовых операторов $\hat{x}_k$, описываемому разложением единицы (3.6), а минимальная среднеквадратичная погрешность определяется матрицей ковариаций

$$R_{ik}=\operatorname{Tr}\rho(\hat{x}_i-\vartheta_i)(\hat{x}_k-\vartheta_k)^*. \tag{3.7}$$

Доказательство достаточности проводится аналогично п. 1. Воспользовавшись инвариантностью правой границы (1.7) относительно аналитических преобразований $\alpha\to\beta$, выберем в качестве перемещенных α^k, определяющих эту границу, канонические параметры β^k семейства ОП (2.1). Элементы $\partial\vartheta_i/\partial\beta^k$ матрицы D с учетом $\vartheta_i=\partial\ln\chi/\partial\bar{\beta}^i$ совпадают при этом с элементами (2.5) матрицы H. Так как операторы $\hat{x}_k$ согласно (3.6) коммутируют $\hat{x}_i\hat{x}_k=\int x_ix_k\Pi(dx)=\hat{x}_k\hat{x}_i$, то $\vartheta_k=\mu_k$, $H_{ik}=S_{ik}$, где μ_k — математические ожидания $\hat{x}_k$, а S_{ik} — ковариации (2.7) этих операторов. Следовательно, неравенство (1.7) принимает вид $R\geqslant S$. Остается доказать, что измерение, описываемое разложением единицы (3.6), приводит к оцениванию, для которого $R=S$ даже в том случае, когда операторы $\hat{x}_k$ не коммутируют с сопряженными: $\hat{x}_i\hat{x}_k^*\neq\hat{x}_k^*\hat{x}_i$ (что имеет место при неортогональности разгде $\hat{x}_i(\bar\beta)=e^{-\bar\beta^k\hat{x}_k}\dfrac{\partial}{\partial\bar\beta^i}e^{\bar\beta^k\hat{x}_k}$, а $\vartheta_i=\dfrac{\partial}{\partial\bar\beta^i}\ln\chi=\operatorname{Tr}\rho\hat{x}_i(\bar\beta)$. Матрица (1.6) есть, следовательно, матрица ковариаций

$$(2.5)\qquad H_{ik}=\operatorname{Tr}\rho(\hat{x}_i(\bar\beta)-\vartheta_i)(\hat{x}_k(\bar\beta)-\vartheta_k)^*=\frac{\partial^2\ln\chi}{\partial\bar\beta^i\,\partial\bar\beta^k}$$

операторов $\hat{x}_i(\bar\beta)$, аналитически зависящих от $\bar\beta$ и совпадающих с $\hat{x}_i$ при $\beta=0$. Неравенство (1.7) в окрестности точки $\beta=0$ можно, следовательно, записать в виде соотношения неопределенности

$$(2.6)\qquad R\geqslant DS^{-1}D^+,$$

устанавливающего обратно пропорциональную зависимость между матрицей $S=\|S_{ik}\|$ ковариаций

$$(2.7)\qquad S_{ik}=\operatorname{Tr}\rho(\beta,\bar\beta)(\hat{x}_i-\mu_i)(\hat{x}_k-\mu_k)^*$$

операторов $\hat{x}_i$, $\operatorname{Tr}\rho(\beta,\bar\beta)\hat{x}_i=\mu_i$ и ковариационной матрицей R оценок $\hat\vartheta^i$ функций $\vartheta^i(\beta,\bar\beta)$ сопряженных им параметров β. Для случая $\vartheta=\beta$ (2.6) принимает канонический вид $R\geqslant S^{-1}$.

В скалярном случае $n=1$ при любых β $\hat{x}(\bar\beta)=\hat{x}$ и соотношение неопределенностей (2.6) является точным неравенством во всей области $\mathbf{O}\ni\beta$. Полагая $\vartheta=\hbar(\beta-\bar\beta)/2i$ и учитывая, что $\partial\vartheta/\partial\beta=\hbar/2i$, получим при $\hat{x}^*=\hat{x}$ обобщенное соотношение неопределенностей

$$(2.8)\qquad R_\vartheta\geqslant\frac{\hbar^2}{4}S_0^{-1}$$

в терминах дисперсий $R_\vartheta=\langle(\hat\vartheta-\vartheta)^2\rangle_\vartheta$, $S_0=\operatorname{Tr}\rho_0(\hat{x}-\mu)^2$, справедливое для любых динамически сопряженных величин $\hat\vartheta$ и $\hat{x}$, определяющих каноническое семейство (2.3). Для частного случая чистых состояний $\rho_0=|\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ скалярное неравенство (2.8) было выведено из неравенства (1.3) Хелстромом [9] путем сложного вычисления матричных элементов операторов симметризованных логарифмических производных.

В многомерном случае, когда операторы $\hat{x}_k$ попарно коммутируют (но не обязательно коммутируют с $\hat{x}_k^*$ и с ρ_0) имеет место та же ситуация: $\hat{x}_k(\bar\beta)=\hat{x}_k$ для всех $\beta\in O$, и неравенство (2.6) является точным. Ожидания μ_k и ковариации (2.7) при $\hat{x}_k=\hat{x}_k^*$ и $\beta^k=i\vartheta^k/\hbar$ не зависят от ϑ и совпадают поэтому со своими значениями при $\vartheta=0$: $\mu_k=\operatorname{Tr}\rho_0\hat{x}_k$,

$$(2.9)\qquad S_{ik}=\operatorname{Tr}\rho_0(\hat{x}_i-\mu_i)(\hat{x}_k-\mu_k).$$

Соотношение неопределенности (2.8) при этом принимает матричный смысл: R_ϑ — ковариационная матрица оценок $\hat\vartheta^i$ канонических параметров некоторой группы смещений в состоянии ρ_ϑ, а S_0 — матрица ковариаций (2.9) генераторов $\hat{x}_k$ этой группы, определяющая нижнюю границу $\hbar^2S_0^{-1}/4$ для R_ϑ равномерно по всем $\vartheta\in\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим теперь случай некоммутирующих $\{\hat{x}_k\}$. Пусть операторы $\hat{x}_k$ образуют алгебру Ли:

$$(2.10)\qquad \hat{x}_i\hat{x}_k-\hat{x}_k\hat{x}_i=C_{ik}^j\hat{x}_j,$$

где C_{ik}^j — структурные константы. В этом случае операторы $\hat{x}_i(\bar\beta)$ в (2.4) представляют собой линейные комбинации генераторов $\hat{x}_i$ [12]:

$$(2.11)\qquad \hat{x}_i(\bar\beta)=L^{-1}(-\bar\beta)_i^j\hat{x}_j,$$

где $L(\xi)=\xi^kC_k(I-e^{-\xi^kC_k})^{-1}$ — матрица $n\times n$, которая существует, по крайней мере, в некоторой окрестности $O\subset\mathbf{C}^n$ нуля $\xi=0$, а $C_k=\|C_{ik}^j\|$ — генераторы присоединенного представления коммутационных соотношений (2.10). Выразив ковариационную матрицу H операторов (2.11) через ковариации (2.7) генераторов $\hat{x}_i$, получим вместо (2.6) точное неравенство

$$(2.12)\qquad R\geqslant DL^+S^{-1}LD^+,$$

где $L=L(-\bar\beta)$. В случае (2.3) семейство ρ_ϑ унитарно однородно относительно группы Ли с эрмитовыми генераторами $\hat{x}_k$ и каноническими параметрами ϑ^k. Аналогично (2.8) получим более общее соотношение

$$(2.13)\qquad R_\vartheta\geqslant\frac{\hbar^2}{4}L_\vartheta{}^TS_0^{-1}L_\vartheta,$$

где $L_\vartheta=\vartheta^kG_k(I-e^{-\vartheta^kG_k})^{-1}$, $G_k=iC_k/\hbar$. Неравенство (2.13) определяет в области $M\subset\mathbf{R}^n$ сходимости ряда

$$(I-e^{-\vartheta^kG_k})^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}e^{-m\vartheta^kG_k},\qquad \vartheta=\{\vartheta^i\}\in M,$$

нижнюю границу среднеквадратичной ошибки измерения канонических параметров унитарного представления $e^{i\vartheta^k\hat{x}_k/\hbar}$ некоторой группы Ли.

3. ЭФФЕКТИВНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И КВАЗИИЗМЕРЕНИЯ

1. В классической статистике оценки, ковариационная матрица которых достигает минимального значения, обращая локально или глобально неравенство Рао — Крамера в равенство, называются эффективными (соответственно локально или глобально). В квантовой статистике из-за неоднозначности обобщения неравенства Рао — Крамера понятие эффективности, введенное по аналогии с классическим, теряет свою универсальность, и определения локально эффективных оценок [1, 4, 5], основанные на разных вариантах этого обобщения, не эквивалентны. Поэтому мы будем различать эффективные измерения (или оценки), для которых достигается инвариантная граница Хелстрома (1.4) от эффективных измерений, соответствующих правой границе (1.7), называя первые эффективными по Хелстрому, а вторые — правоэффективными. Как здесь будет доказано, понятие правоэффективности является более универсальным: измерения, глобально эффективные по Хелстрому, являются и правоэффективными, но не наоборот. Докажем вначале, что эффективные по Хелстрому оценки существуют глобально для канонических семейств ОП (2.1), если операторы $\hat{x}_k$ эрмитовы и попарно коммутируют, а в качестве оцениваемых параметров ϑ берутся производные $\vartheta_k=\partial\ln\chi/\partial\varkappa^k$ производящей функции $\chi(\varkappa)=\operatorname{Tr}\rho_0e^{\varkappa^k\hat{x}_k}$, где $\varkappa=\beta+\bar\beta$. Выбранные таким образом параметры ϑ_k совпадают с математическими ожиданиями, определяемыми каноническими подсе-

$\vartheta^i(\alpha, \bar\alpha)$, дифференцируемыми независимо [2] по α и $\bar\alpha$. Определим неэрмитовы логарифмические производные ОП $\rho=\rho(\alpha, \bar\alpha)$ соотношениями

$$(1.5)\qquad \rho h_k=\frac{\partial\rho}{\partial\bar\alpha^k}, \qquad h_k^*\rho=\frac{\partial\rho}{\partial\alpha^k}, \qquad k=1,\dots,n.$$

Операторы $h_k=h_k(\alpha, \bar\alpha)$ называются правыми производными по $\bar\alpha^k$ (h^* — левыми по α) и имеют нулевые математические ожидания. Матрица ковариаций

$$(1.6)\qquad H_{ik}(\alpha, \bar\alpha)=\mathrm{Tr}\,\rho(\alpha, \bar\alpha)h_ih_k^*$$

является эрмитовой и в предположении невырожденности определяет положительно-определенную метрику $ds^2=H_{ik}d\bar\alpha^id\alpha^k$ в некоторой комплексной области $\mathcal{O}\subset\mathbf{C}^n$ неизвестных значений $\alpha\in\mathcal{O}$.

Пусть совместное измерение параметров ϑ^i описывается некоторым разложением единицы (1), определяющим оценку $\hat\vartheta$, которая представляет собой векторную случайную величину с, вообще говоря, комплексными значениями $x=\{x^i\}\in\mathbf{C}^m$ и условным распределением $P(dx|\alpha, \bar\alpha)=\mathrm{Tr}\,\Pi(dx)\rho(\alpha, \bar\alpha)$, удовлетворяющую условиям несмещенности $\langle\hat\vartheta^i\rangle=\vartheta^i(\alpha, \bar\alpha)$. Тогда среднеквадратичная погрешность измерения определяется матрицей $R=R(\alpha, \bar\alpha)$ ковариаций $R^{ik}=\langle(\hat\vartheta^i-\vartheta^i)(\hat\vartheta^k-\vartheta^k)^*\rangle$, для которой справедливо неравенство

$$(1.7)\qquad R\geqslant DH^{-1}D^+,$$

где $D=D(\alpha, \bar\alpha)$, как и в (1.4), есть матрица производных $\partial\vartheta^i/\partial\alpha^k$, а D^+ — эрмитово сопряженная матрица. Даже в вещественном случае $\vartheta^i=\bar\vartheta^i$ неравенство (1.7) приводит к нижней границе, отличной от границы Хелстрома (1.4). Нижнюю границу в (1.7) будем называть правой. Наряду с этой границей можно рассматривать и другие границы, например «левую», основанную на левых логарифмических производных по $\bar\alpha$. Доказательство всех таких неравенств аналогично доказательству неравенства (1.7), которое изложено в приложении. Правая граница в (1.8) инвариантна относительно замены производных по α^k производными по новым переменным $\beta^k=\beta^k(\alpha)$ лишь при условии аналитичности $\partial\beta^k/\partial\bar\alpha^i=0$ функций $\beta^k(\alpha)$ и невырожденности матрицы производных $\partial\beta^k/\partial\alpha^i$. Поэтому использование неравенства (1.8) в неинвариантной форме $R\geqslant H^{-1}$, где аналогично (1.3) используются производные сразу по оцениваемым параметрам ϑ^i (но в отличие от (1.3) не симметризованные, а правые), нецелесообразно, так как условие эквивалентности этих неравенств включает в себя не только условия невырожденности матрицы D, но и условие аналитичности $\partial\vartheta^i/\partial\bar\alpha^k=0$ (т. е. независимости функций $\vartheta^i(\alpha, \bar\alpha)$ от $\bar\alpha$), чего мы не предполагаем. Аналогичная ситуация для комплексных параметров α имеет место и в классическом случае.

---

[2] Производные $\partial/\partial\bar\alpha$, $\partial/\partial\alpha$ определяются с помощью частных производных $\partial/\partial\alpha_1$, $\partial/\partial\alpha_2$ обычным образом:

$$\partial/\partial\bar\alpha=\frac{1}{2}(\partial/\partial\alpha_1+i\partial/\partial\alpha_2), \qquad \partial/\partial\alpha=\frac{1}{2}(\partial/\partial\alpha_1-i\partial/\partial\alpha_2).$$

2. КАНОНИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В классической математической статистике особую роль играют канонические, или экспоненциальные, семейства распределений вероятности, для которых при специальном выборе параметров ϑ и α граница Рао — Крамера является точной. В разделе 3 будет доказано, что в квантовой статистике аналогичную роль играют ОП вида

$$(2.1)\qquad \rho(\beta, \bar\beta)=\chi^{-1}e^{\beta^k\hat x_k^*}\rho_0e^{\bar\beta^k\hat x_k},$$

где $\hat x_k$, $k=1, \dots, n$ — линейно-независимые операторы в $\mathscr{H}$, которые могут быть неэрмитовыми: $\hat x_k^*\neq\hat x_k$, и могут не коммутировать с сопряженными $\hat x_i\hat x_k^*\neq\hat x_k^*\hat x_i$, а $\chi=\chi(\beta, \bar\beta)$ — производящая функция моментов этих операторов в состоянии ρ_0:

$$(2.2)\qquad \chi(\beta, \bar\beta)=\mathrm{Tr}\,\rho_0e^{\bar\beta^k\hat x_k}e^{\beta^k\hat x_k^*},$$

определенная ($\chi<\infty$) в некоторой окрестности нуля $\beta=0$ комплексного пространства $\mathbf{C}^n$. Семейства ОП (2.1) будем называть каноническими, а параметры β^k — канонически сопряженными к величинам $\hat x_k$. В отличие от классического случая даже для эрмитовых $\hat x_k$ имеет смысл рассматривать комплексные значения сопряженных параметров β^k.

Особый интерес представляет не имеющий классического аналога случай канонических состояний (2.1), когда β^k мнимые, а $\hat x_k$ эрмитовы. Параметры $\vartheta^k=\hbar(\beta^k-\bar\beta^k)/2i$ ($\hbar$ — постоянная Планка) при этом принимают размерность и смысл величин, динамически сопряженных к величинам $\hat x_k$, например [9], если $\hat x$ — гамильтониан, то ϑ — время, если $\hat x$ — импульс, то ϑ — смещение, если $\hat x$ — число квантов, то ϑ — фаза. Канонические состояния (2.1) при $\beta^k=i\vartheta^k/\hbar$ принимают вид

$$(2.3)\qquad \rho_\vartheta=e^{i\vartheta^k\hat x_k/\hbar}\rho_0e^{-i\vartheta^k\hat x_k/\hbar}$$

и являются унитарно-эквивалентными состоянию ρ_0, соответствующему нулевому значению $\vartheta=0$. Оказывается, что если положить $\alpha=\beta$ и применить неравенство (1.7) к каноническому семейству (2.3), то можно получить точную формулировку обобщенного принципа неопределенности Гейзенберга для любых динамически сопряженных величин $\hat\vartheta^k$ и $\hat x_k$, первым из которых могут и не соответствовать никакие эрмитовы операторы, адекватно описывающие в $\mathscr{H}$ их измерение [3].

Дифференцируя (2.1) по $\bar\beta^k$ и сравнивая с (1.5), получим

$$(2.4)\qquad h_i=e^{-\bar\beta^k\hat x_k}\chi\frac{\partial}{\partial\bar\beta^i}\chi^{-1}e^{\bar\beta^k\hat x_k}=\hat x_i(\bar\beta)-\vartheta_i,$$

---

[3] Принцип неопределенности Гейзенберга обычно доказывается лишь для тех динамически сопряженных величин, которые описываются операторами $\hat p$ и $\hat x$, удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям $[\hat p, \hat x]=\hbar/i$. При этом используется известное скалярное неравенство $\langle(\hat p-\langle\hat p\rangle)^2\rangle\langle(\hat x-\langle\hat x\rangle)^2\rangle\geqslant|\langle[\hat p, \hat x]\rangle|^2/4$, справедливое для любых операторов $\hat p$ и $\hat x$. Усиление и матричное многомерное обобщение последнего неравенства в терминах ковариаций оценок произвольного семейства некоммутирующих операторов предложено в [7].

гое обобщение (1.7) этого неравенства, которое в отличие от неравенства Хелстрома естественно приспособлено и для комплексной ситуации и позволяет просто получить многомерное обобщение соотношений неопределенностей (2.8) не только в случае чистых состояний, но и для смешанных. Получено также некоммутативное обобщение (2.13) этих соотношений для генераторов и канонических параметров унитарных представлений произвольной группы Ли. Указанные обобщения тесно связаны с описываемыми в разделе 2 каноническими семействами состояний, особая роль которых вскрывается в разделе 3, где доказывается, что для того чтобы полученные нижние границы для квадратичных ошибок измерения явились точными, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие ОП имели канонический вид (2.1).

1. ИНВАРИАНТНЫЕ ГРАНИЦЫ ТИПА РАО — КРАМЕРА В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

1. Пусть $\{\rho_\vartheta, \vartheta\in M\}$ — семейство ОП ρ_ϑ в $\mathscr{H}$, описывающих статистическое состояние квантовой системы в зависимости от вещественных параметров $\vartheta=\{\vartheta^i, i=1, \dots, m\}$, о которых известно, что они имеют какие-то значения в заданной области $M\subset\mathbf{R}^m$. Всякое совместное измерение этих (неизвестных) параметров состояния описывается в $\mathscr{H}$ некоторым разложением единицы (1), где $x=\{x^i\}\in\mathbf{R}^m$, которое определяет векторную случайную величину $\hat\vartheta=\{\hat\vartheta^i\}$, имеющую при каждом ϑ распределение вероятностей $P_\vartheta(dx)=\mathrm{Tr}\,\rho_\vartheta\Pi(dx)$. Среднеквадратичные ошибки измерения определяются компонентами $R^{ik}(\vartheta)=\langle(\hat\vartheta^i-\vartheta^i)(\hat\vartheta^k-\vartheta^k)\rangle_\vartheta$ матрицы $R_\vartheta=\|R^{ik}(\vartheta)\|$ с помощью выражений вида[1] $G_{ik}R^{ik}(\vartheta)$, где G_{ik} — компоненты некоторой неотрицательно-определенной матрицы $G=\|G_{ik}\|$, выполняющей роль метрического тензора. Далее рассматриваются лишь такие измерения, которые удовлетворяют условиям несмещенности $\langle\hat\vartheta^i\rangle_\vartheta=\vartheta^i$, при выполнении которых матрица R_ϑ есть ковариационная матрица оценок $\hat\vartheta^i$, а среднеквадратичная ошибка при фиксированном R_ϑ принимает минимальное значение.

Для ковариационной матрицы R_ϑ в предположении дифференцируемости оператор-функции $\rho_\vartheta=\rho(\vartheta)$ Хелстром установил [1] нижнюю границу, используя понятие операторов g_i частных симметризованных логарифмических производных функций $\rho(\vartheta)$ по ϑ^i, которые он определил уравнениями

$$(1.1)\qquad g_i\rho_\vartheta+\rho_\vartheta g_i=2\frac{\partial\rho_\vartheta}{\partial\vartheta^i}.$$

Как и в классическом случае [11], эту границу определяет матрица $G_\vartheta=\|G_{ik}(\vartheta)\|$ ковариаций решений $g_i=g_i(\vartheta)$ уравнений (1.1), которая для

---

[1] Здесь и далее рассматривается эйнштейновское соглашение о суммировании:

$$G_{ik}R^{ik}=\sum_i\sum_k G_{ik}R^{ik}.$$

некоммутирующих g_i берется в симметризованном виде

$$(1.2)\qquad G_{ik}(\vartheta)=\mathrm{Tr}\,\rho_\vartheta{}^1/_2(g_ig_k+g_kg_i)$$

(математические ожидания $\mathrm{Tr}\,\rho_\vartheta g_i(\vartheta)$ равны нулю). Соответствующее неравенство имеет вид

$$(1.3)\qquad R_\vartheta\geqslant G_\vartheta^{-1},\quad \vartheta\in M,$$

и понимается в смысле неотрицательной определенности матрицы $\|R^{ik}(\vartheta)-G^{ik}(\vartheta)\|$, где $G^{ik}(\vartheta)$ — компоненты обратной матрицы G_ϑ^{-1}: $G^{ij}(\vartheta)G_{jk}(\vartheta)=\delta_k^i$. Неравенство (1.3) является квантовым аналогом неравенства Рао — Крамера [11]. Матрица G_ϑ играет роль метрического тензора, локально определяющего расстояние $\sigma(\vartheta, \vartheta+d\vartheta)=G_{ik}(\vartheta)d\vartheta^id\vartheta^k$ в пространстве параметров M, аналогичное информационному расстоянию Фишера в классической статистике.

Далее будет рассматриваться несколько более общая ситуация, когда параметрами состояния являются не измеряемые параметры ϑ^i, а некоторые параметры $\alpha=\{\alpha^k, k=1, \dots, n\}$, $\rho=\rho(\alpha)$. Параметры ϑ^i являются дифференцируемыми функциями $\vartheta^i(\alpha)$ неизвестных параметров α. Соответствующее обобщение неравенства Хелстрома (1.3) представляет собой границу для ковариационной матрицы $R=R(\alpha)$ оценок $\hat\vartheta_i$ в виде, инвариантном относительно выбора переменных состояния $\rho(\alpha)$,

$$(1.4)\qquad R\geqslant DG^{-1}D^T,$$

где $D=|\partial\vartheta^i/\partial\alpha^k|$, а $G=G(\alpha)$ — матрица ковариаций (1.2) операторов $g_k=g_k(\alpha)$ симметризованных логарифмических производных оператор-функции $\rho(\alpha)$ по α^k.

Неравенство (1.4), эквивалентное неравенству (1.3) лишь в случае равных размерностей $m=n$ и невырожденности матрицы $D=D(\alpha)$, доказывается аналогично доказательству неравенства (1.7) (см. приложение).

Неравенство (1.4) сводится к классическому неравенству Рао — Крамера лишь в случае, когда семейство $\{\rho(\alpha)\}$ коммутативно. Для некоммутативных семейств возможны и другие квантовые обобщения [4, 5] неравенства Рао — Крамера, основанные на других определениях логарифмических производных и приводящие к другим нижним границам для R, отличным от инвариантной границы Хелстрома $DG^{-1}D^T$. Все они в вещественном случае одинаково могут претендовать на роль квантового аналога неравенства Рао — Крамера и совпадают лишь при условии коммутативности семейства $\{\rho(\alpha)\}$, при котором они сводятся к классическому. Однако для случая комплексных параметров α особое значение приобретает следующее инвариантное обобщение неравенства Рао — Крамера, основанное на правых и левых логарифмических производных, предложенных независимо автором [3] и Юном и Лэксом [5].

2. Пусть параметры α^k представляют собой пары (α_1^k, α_2^k), которые можно считать комплексными числами $\alpha^k=\alpha_1^k+i\alpha_2^k$, $\alpha=\{\alpha^k\}\in\mathbf{C}^n$. Оцениваемые параметры $\vartheta^i=\vartheta^i(\alpha, \bar\alpha)$, $i=1, \dots, m$, предполагаются функциями